

Chapitre 7 : Réciproque du théorème de Thalès

Réciproque du théorème de Thalès : Si les points A ; B et C d'une part et les points A ; D et E d'autre part sont alignés dans le même ordre, et si :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

ou
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

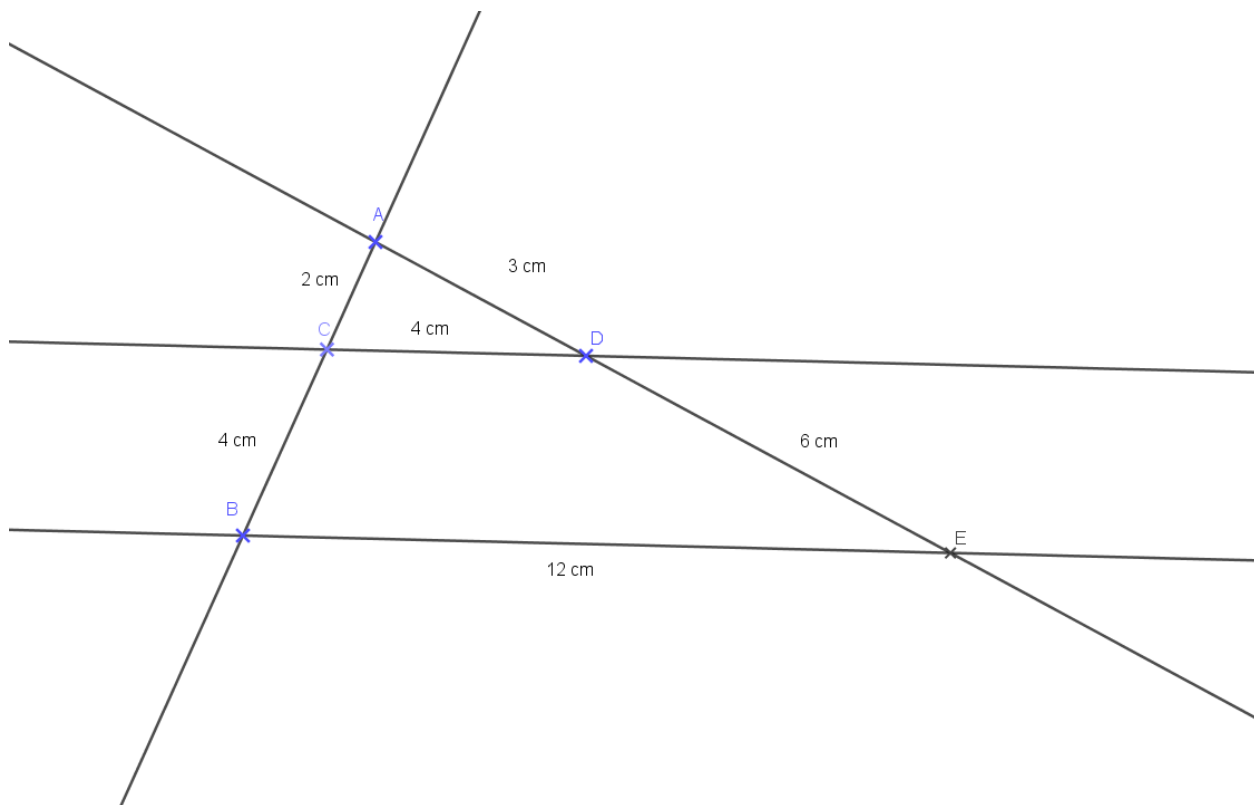
ou
$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$

Alors, les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

Remarque :

Le théorème de Thalès nous permettait de calculer la longueur d'un ou de plusieurs segments. Ici la réciproque permet de montrer que deux droites sont parallèles.

Exemple : Démontrons que les droites (CD) et (BE) sont parallèles :



$$AE = 6+3 = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{BE}{CD} = \frac{12}{4} = 3$$

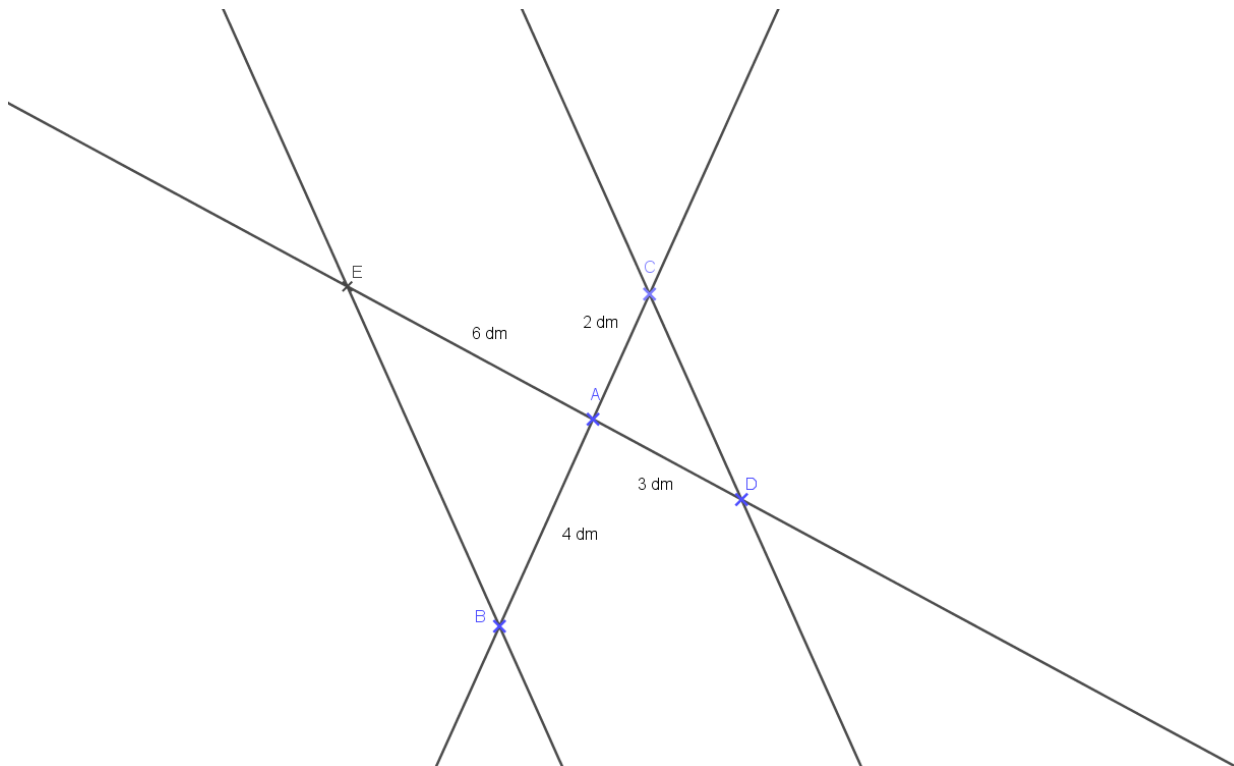
Ici les points A ; D et E d'une part et les points A ; C et B d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

De plus :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, nous pouvons conclure que les droites (CD) et (BE) sont parallèles.

Exemple : Démontrons que les droites (CD) et (BE) sont parallèles :



$$\frac{CA}{AB} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$\frac{DA}{AE} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Ici les points D ; A et E d'une part et les points C ; A et B d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

De plus :

$$\frac{CA}{AB} = \frac{DA}{AE}$$

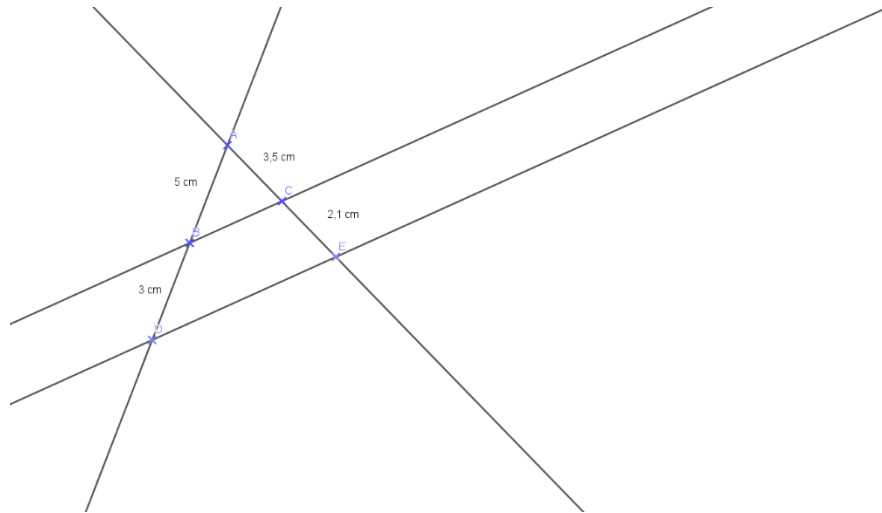
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, nous pouvons conclure que les droites (BE) et (DC) sont parallèles.

Exercices : Réciproque du théorème de Thalès

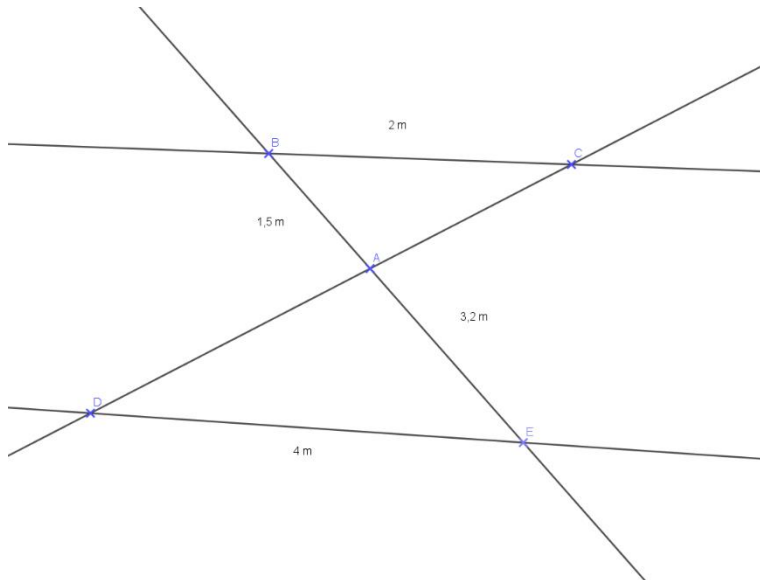
Exercice 1 :

Dans chaque cas, dire si les droites (BC) et (DE) sont parallèles :

a./



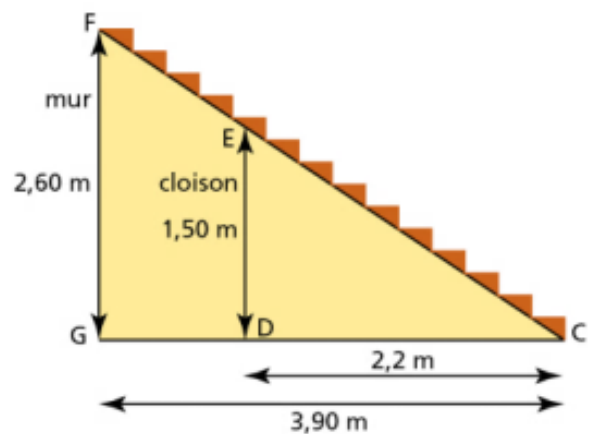
b./



Exercice 2 :

Monsieur Maçon veut aménager un espace de rangement sous son escalier. Il prend les mesures après avoir installé sa cloison.

Sachant que le mur est bien perpendiculaire au sol, peut-on dire que la cloison montée par Monsieur Maçon est bien verticale ?



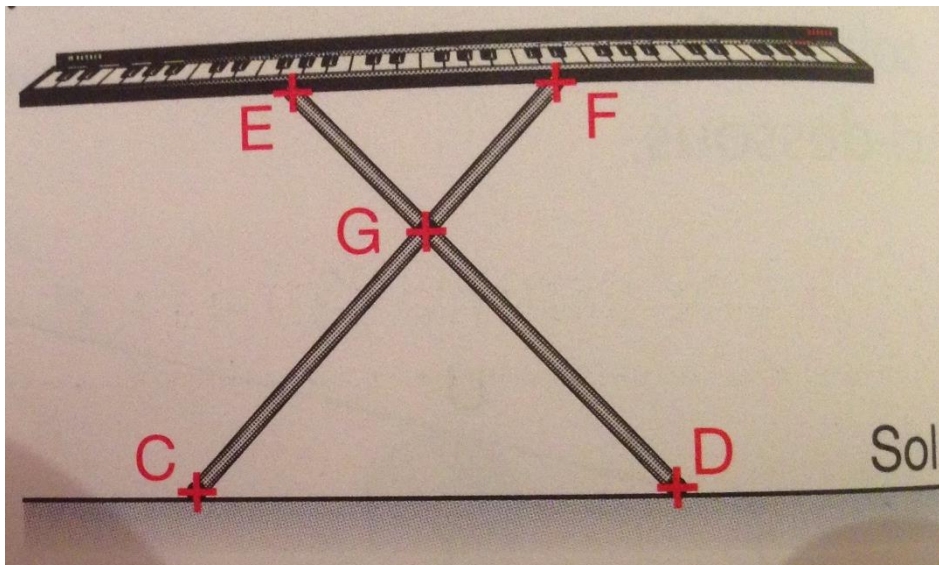
Exercice 3 :

Lancelot pose son piano numérique sur un « stand clavier » dont les dimensions sont les suivantes :

$$GE = 48 \text{ cm}; GF = 60 \text{ cm}; ED = 1,2 \text{ m}; CF = 1,5 \text{ m}$$

Le sol est représenté par la droite (CD).

Le clavier est-il parallèle au sol ?



Exercice 4 :

EXERCICE 5

14 POIN

Dans l'exercice suivant, les figures ne sont pas à l'échelle.

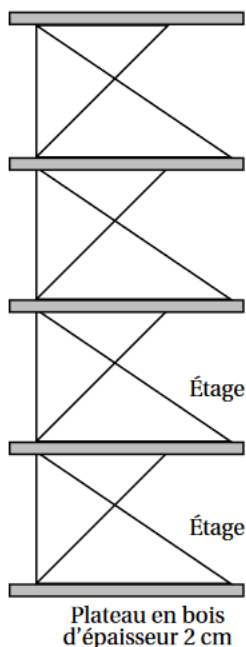
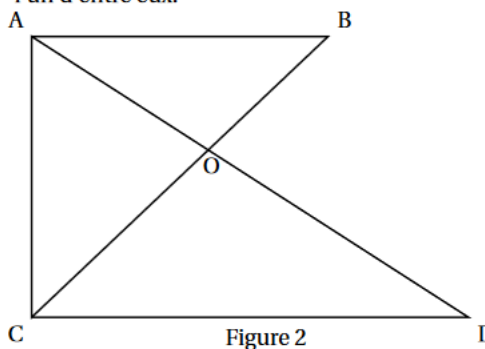


Figure 1

Un décorateur a dessiné une vue de côté d'un meuble de rangement composé d'une structure métallique et de plateaux en bois d'épaisseur 2 cm, illustré par la figure 1.

Les étages de la structure métallique de ce meuble de rangement sont tous identiques et la figure 2 représente l'un d'entre eux.



On donne :

- $OC = 48 \text{ cm}$; $OD = 64 \text{ cm}$; $OB = 27 \text{ cm}$; $OA = 36 \text{ cm}$ et $CD = 80 \text{ cm}$;
- les droites (AC) et (CD) sont perpendiculaires.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Montrer par le calcul que $AB = 45 \text{ cm}$.
3. Calculer la hauteur totale du meuble de rangement.

Corrections :

Exercice 1 :

a./ D'après les données de l'énoncé :

$$AE = 3,5 + 2,1 = 5,6 \text{ cm}$$

$$AD = 5 + 3 = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5}{8} = 0,625$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3,5}{5,6} = 0,625$$

Donc :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Les points A ; C et E d'une part, et les points A ; B et D d'autre part sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

b./ D'après les données de l'énoncé :

$$\frac{BC}{DE} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$\frac{BA}{AE} = \frac{1,5}{3,2} = 0,46875$$

Donc :

$$\frac{BC}{DE} \neq \frac{BA}{AE}$$

De plus, les points C ; A et D d'une part et les points B ; A et E d'autre part sont alignés dans le même ordre. On peut donc conclure que d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

Exercice 2 :

D'après les données de l'énoncé :

Les points C ; D et G d'une part et les points C ; E et F d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{CD}{CG} = \frac{2,2}{3,9} = \frac{22}{39} \approx 0,56$$

$$\frac{ED}{FG} = \frac{1,5}{2,6} = \frac{15}{26} \approx 0,58$$

Donc :

$$\frac{CD}{CG} \neq \frac{ED}{FG}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (ED) et (FG) ne sont pas parallèles. On peut donc conclure que la cloison n'est pas bien verticale !

Exercice 3 :

D'après les données de l'énoncé :

$$GD = ED - EG = 120 - 48 = 72 \text{ cm}$$

$$GC = FC - GF = 150 - 60 = 90 \text{ cm}$$

De plus, E ; G et D d'une part et F ; G et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

Mais aussi :

$$\frac{EG}{GD} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

$$\frac{GF}{GC} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Donc :

$$\frac{EG}{GD} = \frac{GF}{GC}$$

On peut donc conclure que les droites (EF) et (CD) sont parallèles. Le clavier est donc bien parallèle au sol !

Exercice 4 :

1. On compare les longueurs des côtés des triangles OAB et ODC :

$$\text{On a } \frac{OA}{OD} = \frac{36}{64} = \frac{4 \times 9}{4 \times 16} = \frac{9}{16};$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{27}{48} = \frac{3 \times 9}{3 \times 16} = \frac{9}{16}, \text{ donc}$$

$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$: d'après la réciproque de la propriété de Thalès cette égalité montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. On sait que l'on a également $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$ ou encore en remplaçant par les valeurs connues :

$$\frac{9}{16} = \frac{AB}{80}, \text{ d'où en multipliant chaque membre par } 80 :$$

$$AB = 80 \times \frac{9}{16} = 16 \times 5 \times \frac{9}{16} = 5 \times 9 = 45 \text{ (cm)}.$$

3. On sait que le triangle ACD est rectangle en C; donc le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$AC^2 + CD^2 = AD^2. \quad (1)$$

$$\text{Or } CD = 80 \text{ et } AD = AO + OD = 36 + 64 = 100.$$

L'égalité (1) devient :

$$AC^2 + 80^2 = 100^2, \text{ d'où } AC^2 = 100^2 - 80^2 = 10000 - 6400 = 3600; \text{ d'où } AC = \sqrt{3600} = 60.$$

Chaque étagère a une hauteur de 60 cm avec un plateau de 2 cm soit une hauteur de 62 cm; il y a 4 étagères, donc la hauteur totale du meuble est égale à : $4 \times 62 = 248$ (cm) plus le dernier plateau donc une hauteur totale de 250 cm.