Chapitre 1 : Différentes représentations des nombres

I./ L'écriture scientifique :

1./ Puissances de 10 :

Activité :

Ecrire le mot « PUISSANCE » au tableau. Demander aux élèves d'écrire sur une feuille à quoi ce mot leur fait penser. Et leur demander de venir au bureau dès qu'ils pensent avoir terminé.

Objectif 1 : Arriver à leur demander d'écrire des nombres sous forme de produits comprenant des puissances (exemple : $36 = 6^2$ *ou* $16 = 2^4$*).*

Objectif 2 : Aller plus loin en réussissant à faire écrire à l'élève un nombre en écriture scientifique. Par exemple, on peut commencer par : $20 = 2 \times 10$ *puis* $200 = 2 \times 10^2$.

Pour les plus rapide, les faire réfléchir aux puissances négatives. Par exemple, si $250 = 2{,}5 \times 10^2$ *comment peut-on écrire :* $2{,}5$?

Faire venir quelques élèves présenter leurs travaux à l'oral.

Bilan :

Propriété : n désigne un nombre entier positif non nul. 10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{\boxed{n \text{ facteurs}}} = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{\boxed{n \text{ zéros}}}$$

Exemples :

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

Propriété : 10^{-n}désigne l'inverse de 10^n.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000 \ldots 00}_{\boxed{n \text{ zéros}}}1$$

Exemple :

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000\,001$$

2./ Unités

Dessiner au tableau un tableau de conversion avec 19 colonnes :

10^9			10^6			10^3	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}			10^{-6}			10^{-9}
Gm			Mm			km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µm			nm
Gg			Mg			kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			µg			ng

Demander aux élèves de remplir les puissances de 10 dans le tableau. Et d'essayer de trouver les noms des préfixes pour 10^6 ; 10^9 ; 10^{-6} ; 10^{-9}.

Exemple :

En 2013, le ministère de la transition écologique annonce que 17 milliards de m^3 d'eau douce ont été utilisé pour refroidir les centrales nucléaires françaises. Ceci représente $17Gm^3$ d'eau.

$$17\ 000\ 000\ 000\ m^3 = 17 \times 10^9\ m^3 = 17Gm^3$$

3./ Notation scientifique d'un nombre décimal

Définition : La notation scientifique d'un nombre décimal est l'unique écriture de ce nombre de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a est un nombre réel compris entre 1 et 10 exclu ($1 \leq a < 10$) et n est un nombre entier relatif.

Exemples :

$$5\ 000 = 5 \times 10^3$$

$$150\ 000\ 000\ km = 1{,}5 \times 10^8\ km$$

ATTENTION : 15×10^7est une écriture correcte, mais n'est pas considérée comme une écriture scientifique !

$$0{,}000\ 7 = 7 \times 10^{-4}$$

$$0{,}005\ 24 = 5{,}24\ \times 10^{-3}$$

Utilisation de la notation scientifique :

Les scientifiques écrivent les nombres sous forme de notation scientifique pour diverses raisons. Elle est d'abord très pratique pour écrire les grand nombres, et les nombres très proche de zéro (comme0, 000 000 000 000 5 par exemple). De plus, elle est très pratique pour connaître l'ordre de grandeur d'un nombre réel.

Exemple :

Le nombre 32 567 000 peut s'écrire :

$$3{,}2567 \times 10^7$$

On peut donc dire que son ordre de grandeur est : 3×10^7, ce qui correspond à 30 millions.

La vérification de l'ordre de grandeur, peuvent permettre aux scientifiques de savoir en un regard si leurs calculs paraissent cohérents, ou s'ils semblent improbables.

Exercice 1 :

1./ Ecrire sous forme de puissance de 10 les nombres suivants :

$$100$$

$$1\ 000\ 000$$

$$0{,}001$$

$$0{,}000001$$

2./ Ecrire sous forme décimale les nombres suivants :

$$10^{-5}$$

$$10^{7}$$

$$10^{-4}$$

$$10^{3}$$

Correction :

1./

$$10^{2}$$

$$10^{6}$$

$$10^{-3}$$

$$10^{-6}$$

2./

$$0{,}00001$$

$$10\ 000\ 000$$

$$0{,}0001$$

$$1\ 000$$

Exercice 2 : ***A donner à faire à la maison !!!***

Recopier et compléter les égalités suivantes :

$$3\ mirolitres = 3 \times 10^{\cdots}\ litres$$

$$7\ mégamètres = 7 \times 10^{\cdots}\ mètres$$

$$\ldots\ \ grammes = 5 \times 10^{2} grammes$$

$$\ldots\ \ mètres = 8 \times 10^{-9} mètres$$

Correction :

$$3 microlitres = 3 \times 10^{-6} litres$$

$$7\ mégamètres = 7 \times 10^{6} mètres$$

$$500\ grammes = 5 \times 10^{2} grammes$$

$$0{,}000\ 000\ 008\ mètres = 8 \times 10^{-9} mètres$$

Exercice 3 :

Effectuer les calculs suivants :

$$A = 10^3 \times 10^5$$

$$B = 10^{-1} \times 10^{-5}$$

$$C = 10^{10} \times 10^{-4}$$

$$D = 3 \times 10^4 \times 5 \times 10^3$$

$$E = 12 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^2$$

Correction :

$$A = 10^3 \times 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$$

$$B = 10^{-1} \times 10^{-5} = 10^{-1-5} = 10^{-6}$$

$$C = 10^{10} \times 10^{-4} = 10^{10-4} = 10^6$$

$$D = 3 \times 10^4 \times 5 \times 10^3 = 3 \times 5 \times 10^4 \times 10^3 = 15 \times 10^{4+3} = 15 \times 10^7$$

$$E = 12 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^2 = 12 \times 3 \times 10^{-4} \times 10^2 = 36 \times 10^{-4+2} = 10^{-2}$$

Exercice 4 :

Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

451	$4\,400 \times 10^3$
27	820×10^{-5}
$0{,}0000578$	$0{,}0054 \times 10^6$
$0{,}25 \times 10^{-7}$	$0{,}0078 \times 10^2$

Correction :

$$451 = 4{,}51 \times 10^2$$

$$27 = 2{,}7 \times 10^1$$

$$0{,}0000578 = 5{,}78 \times 10^{-5}$$

$$0{,}25 \times 10^{-7} = 2{,}5 \times 10^{-8}$$

$$4\,400 \times 10^3 = 4{,}4 \times 10^6$$

$$820 \times 10^{-5} = 8{,}2 \times 10^{-3}$$

$$0{,}0054 \times 10^6 = 5{,}4 \times 10^9$$

$$0{,}0078 \times 10^2 = 7{,}8 \times 10^{-1}$$

Exercice 4 :

En 2019, la France produit 537,7 TWh (térawatt-heure) d'énergie électrique par an. Une éolienne produit 3,7 GWh d'énergie électrique par an.

1./ Sachant que 1TWh = 10^3 GWh, combien faudrait-il d'éoliennes pour obtenir la totalité de la production française d'énergie électrique en 2019 ?

2./ Sachant que le parc éolien français compte au total 6 500 éoliennes, est-ce que cette solution vous parait plausible* ?

*plausible : Qui semble devoir être admis.

Correction :

1./ Avant de répondre à la question, il faut convertir les TWh en GWh ou les GWh en TWh.

$$537{,}7\, TWh = 537{,}7 \times 10^3 GWh = 5{,}377\ \times 10^5 GWh$$

Ensuite on peut utiliser la proportionnalité :

Nombre d'éolienne	Energie (GWh)
1	3,7
	$5{,}377 \times 10^5$

En utilisant le produit en croix, nous pouvons calculer facilement le nombre d'éoliennes pour atteindre la totalité de la production française d'énergie électrique :

$$\frac{1 \times 5{,}377 \times 10^5}{3{,}7} \approx 1{,}453 \times 10^5 = 145\,300$$

Il faudrait environ 145 300 éoliennes pour atteindre la production totale d'énergie électrique française.

2./

$$\frac{145\,300}{6\,500} \approx 22$$

Il faudrait environ 22 fois plus d'éoliennes qu'aujourd'hui, ce qui semble difficile à atteindre.

Exercice 5 :

Une personne effectue un cycle respiratoire (inspiration et expiration) en moyenne 17 fois par minute. En supposant que cette personne vive 80 ans, estimer le nombre de cycles respiratoires effectués durant toute sa vie. Exprimer le résultat sous forme de notation scientifique.

Correction :

Pour répondre à cette question, il faut calculer combien il y a de minutes en 80 ans.

Prenons en compte que tous les 4 ans, c'est une année bissextile.

$$\frac{80}{4} = 20$$

Il y 20 années bissextiles en 80 ans, donc 60 qui ne le sont pas.

Une année normale : 365 jours.

Une année bissextile : 366 jours.

Calcul du nombre de jours en 80 ans :

$$60 \times 365 + 20 \times 366 = 21\,900 + 7\,320 = 29\,220$$

Il y a 29 220 jours en 80 ans.

Calcul du nombre de minutes en un jour :

1 jour = 24 heures

1 heure = 60 minutes

$$60 \times 24 = 1\,440 \; minutes$$

Il y a 1 440 minutes en un jour.

Calcul du nombre de minutes en 80 ans :

80 ans = 29 220 jours

1 jour = 1 440 minutes

$$1\,440 \times 29\,220 = 42\,076\,800 \; minutes$$

Il y a 42 076 800 minutes en 80 ans.

Calcul du nombre de cycle respiratoire en 80 ans :

80 ans : 42 076 800 minutes

1 minute : 17 cycles respiratoires

$$42\,076\,800 \times 17 = 715\,305\,600 \; cycles\ respiratoires = 7{,}153056 \times 10^8 \; cycles\ respiratoires$$

Il y aura environ $7{,}153056 \times 10^8$ cycles respiratoires dans la vie d'une personne qui aura vécu 80 ans.

II./ Les nombres premiers

1./ Nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers

Activité : Vous allez jouer au jeu du Juniper Green. C'est un jeu qui se joue à deux.

Règles du jeu :

- *Le joueur qui commence choisit un nombre sur la grille suivante et l'entoure.*
- *A tour de rôle, chaque joueur choisit un nombre parmi les multiples ou diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire. Attention, un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.*
- *Un joueur est déclaré gagnant quand son adversaire ne peut plus jouer.*

Voici la grille de jeu :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

1./ Faire plusieurs parties avec sa ou son camarade en essayant de trouver une stratégie gagnante.

2./ Il existe une stratégie qui permet au joueur débutant de gagner la partie à coup sûr. Qu'elle est-elle ?

3./ Cette stratégie s'appuie sur l'utilisation de certains nombres. Quels sont-ils ?

4./ Combien de diviseurs ont ces nombres ? Comment s'appellent ces nombres ?

5./ Introduisons une nouvelle règle : Le premier joueur doit commencer par un nombre pair. Avec cette règle essayez de faire la partie la plus longue possible.

Bilan de l'activité :

Définition : Un nombre premier et un nombre entier qui n'est divisible que par deux nombres : 1 et lui-même.

Voici la liste des 25 premiers nombres premiers :

2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Propriété : Tout nombre qui n'est pas un nombre premier peut s'écrire sous forme d'un produit composé uniquement de nombres premiers.

Exemple : Décomposons 55 et 462 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{c|c} 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $55 = 5 \times 11$

$$\begin{array}{c|c} 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 11 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $462 = 2 \times 3 \times 11 \times 7$

2./ Utilisation des nombres premiers pour rendre une fraction irréductible :

Définition : une fraction est irréductible s'il n'existe pas de fraction égale avec des termes plus petits.

Exemple : Simplifions les fractions suivantes : $\frac{24}{9}$ $\quad et \quad$ $\frac{42}{105}$

Pour simplifier les fractions il faut décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$9 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$\frac{24}{9} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$105 = 5 \times 3 \times 7$$

$$\frac{42}{105} = \frac{2 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7} = \frac{2}{5}$$

Exercices : Nombres premiers

Exercice 1.6 :

1./Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

a./ 910 b./ 1 430 c./ 520 560

2./ Quels sont tous les diviseurs communs à ces nombres ?

3./ Quel est le plus grand diviseur commun ?

Exercice 1.7 : *BREVET juillet 2019*

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

1./ Décomposer 69, 1 150 et 4 140 en produit de facteurs premiers.

2./ Quels sont les diviseurs communs à ces trois nombres ?

3./ Le capitaine partage le trésor équitablement entre les marins. Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

Exercice 1.8 :

Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 peluches et 270 DVD. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les peluches et tous les DVD.

1./ Combien y aura-t-il de lots identiques ?

2./ Quelle sera la composition de chaque lot ?

Exercice 1.9 :

Ecrire les fractions suivantes sous forme de fractions irréductibles, puis les ranger dans l'ordre décroissant afin de découvrir le nom du pays :

$$R = \frac{4536}{5832}$$

$$U = \frac{1426}{6417}$$

$$P = \frac{4914}{5265}$$

$$O = \frac{5616}{12636}$$

$$E = \frac{6804}{8262}$$

CORRECTIONS :

Exercice 1.6 :

1./

$$910 = 2 \times 5 \times 7 \times 13$$

$$1\,430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13$$

$$520\,560 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 23 \times 29 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 23 \times 29$$

2./ On entoure d'abord les diviseurs communs visibles dans les décompositions :

$$910 = 2 \times 5 \times 7 \times 13$$

$$1\,430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13$$

$$520\,560 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 23 \times 29 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 23 \times 29$$

Ensuite, on peut regarder les combinaisons que l'on peut faire :

On peut avoir :

$$2 \times 5 = 10$$

$$5 \times 13 = 65$$

$$2 \times 13 = 26$$

$$2 \times 5 \times 13 = 130$$

Voici la liste des diviseurs communs :

$$2; 5; 10; 13; 26; 65; 130$$

3./ Le plus grand diviseur commun est 130.

Exercice 1.7 :

1./

$$69 = 3 \times 23$$

$$1\,150 = 2 \times 5 \times 5 \times 23 = 2 \times 5^2 \times 23$$

$$4\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$$

2./ Commençons par entourer les diviseurs communs visibles dans la décomposition :

$$69 = 3 \times 23$$

$$1\,150 = 2 \times 5 \times 5 \times 23 = 2 \times 5^2 \times 23$$

$$4\,140 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$$

Il n'y a qu'un seul diviseur commun, c'est 23.

3./ Il ne peut diviser le nombre de perles, pièces et diamants seulement par 23, s'il veut faire une répartition identique. Il y a donc 23 marins (ou 22 marins plus le capitaine).

Exercice 1.8 :

1./ Pour répondre à cette question, nous devons décomposer 378 et 270 en produit de facteurs premiers, et trouver le plus grand commun diviseur pour trouver le plus grand nombre de lots identiques.

$$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 7$$

$$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$$

Entourons d'abord les diviseurs communs qui apparaissent dans la décomposition :

$$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$$

Regardons ensuite les combinaisons :

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$$

La liste est la suivante :

$$2; 3; 6; 9; 18; 27; 54$$

Le plus grand diviseur commun est 54.

On pourra donc faire au maximum 54 lots identiques.

2./ Pour savoir quelle sera la composition des lots on divise 378 et 270 par 54 :

$$\frac{378}{18} = 7$$

$$\frac{270}{18} = 5$$

Chaque lot sera composé de 7 peluches et 5 DVD.

Exercice 1.9 :

$$R = \frac{4536}{5832} = \frac{2^3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{7}{3^2} = \frac{7}{9}$$

4 536	2
2 268	2
1 134	2
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

5 832	2
2 916	2
1 458	2
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$2\ 268 = 2^3 \times 3^4 \times 7$

$5\ 832 = 2^3 \times 3^6$

$$U = \frac{1426}{6417} = \frac{2 \times 23 \times 31}{3^2 \times 23 \times 31} = \frac{2}{9}$$

1 426	2
713	23
31	31
1	

$1\,426 = 2 \times 23 \times 31$

6 417	3
2 139	3
713	23
31	31
1	

$6417 = 3^2 \times 23 \times 31$

$$P = \frac{4914}{5265} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 13}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

4 914	2
2 457	3
819	3
273	7
39	13
3	3
1	

$4\,914 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 13$

5 265	3
1 755	3
585	3
195	3
65	5
13	13
1	

$5\,265 = 3^4 \times 5 \times 13$

$$O = \frac{5616}{12636} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$$

5 616	2
2 808	2
1 404	2
702	2
351	3
117	3
39	3
13	13
1	

$5\,616 = 2^4 \times 3^3 \times 13$

12 636	2
6 318	2
3 159	3
1 053	3
351	3
117	3
39	3
13	13
1	

$12\,636 = 2^2 \times 3^5 \times 13$

$$E = \frac{6804}{8262} = \frac{2 \times 2 \times 3^5 \times 7}{2 \times 3^5 \times 17} = \frac{2 \times 7}{17} = \frac{14}{17}$$

6 804	2
3 402	2
1 701	3
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

$6804 = 2^2 \times 3^5 \times 7$

8 262	2
4 131	3
1 377	3
459	3
153	3
51	3
17	17
1	

$8\,262 = 2 \times 3^5 \times 17$

On sait que :

$$\frac{7}{9} > \frac{4}{9} > \frac{2}{9}$$

Donc :

$$R > O > U$$

Mais aussi :

$$\frac{14}{15} > \frac{14}{17}$$

Donc :

$$P > E$$

On sait aussi que :

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$$

Or :

$$\frac{14}{17} > \frac{14}{18}$$

Donc :

$$E > R$$

On a alors :

$$P > E > R > O > U$$

Le nom du pays est Pérou.