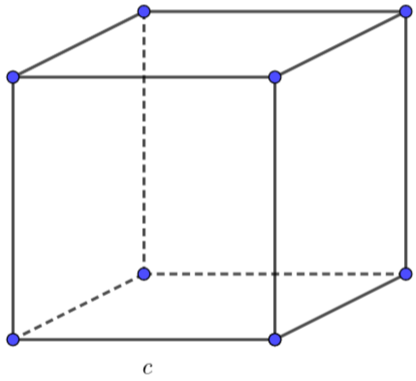
Chapitre 2 : Solides usuels

I./ Rappels

Le cube :

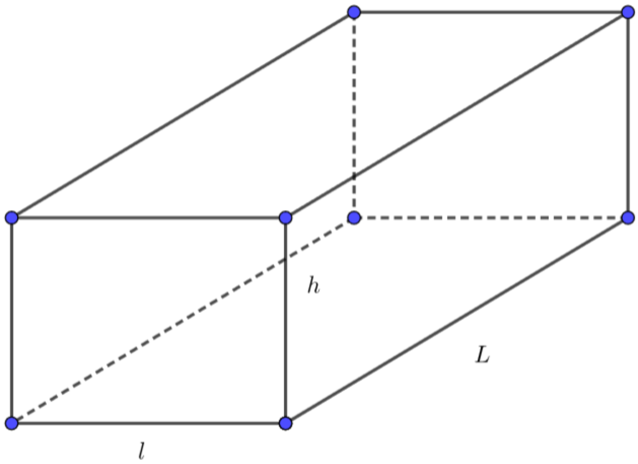
$$Volume = C^3$$



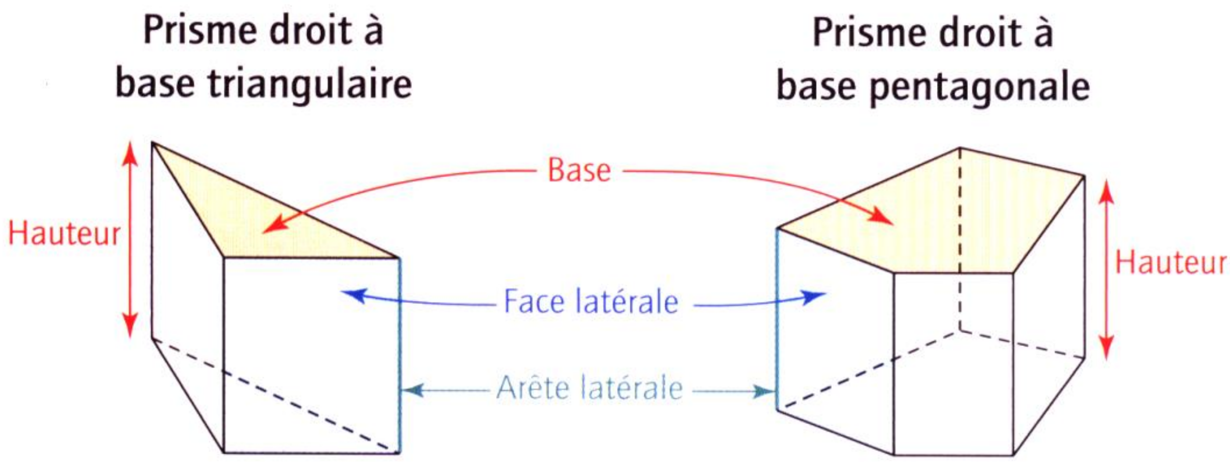
Le parallélépipède rectangle (ou pavé droit) :

$$Volume = Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur$$

$$Volume = L \times l \times h$$



Le prisme droit :

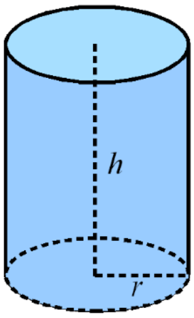


$$Volume = Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur$$

Cylindre :

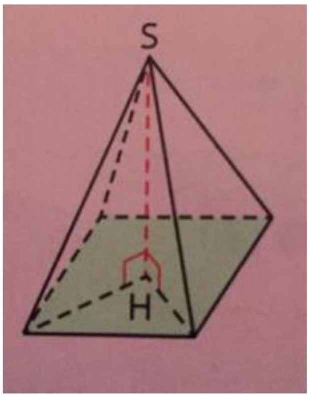
$$Volume = Aire\ de\ la\ base\ \times hauteur$$

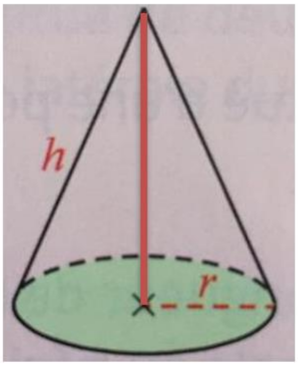
$$Volume = \pi \times r^2 \times h$$



Pyramide et cône de révolution :

$$Volume = \frac{(Aire_{base} \times Hauteur)}{3}$$





II./ Sphère et Boule

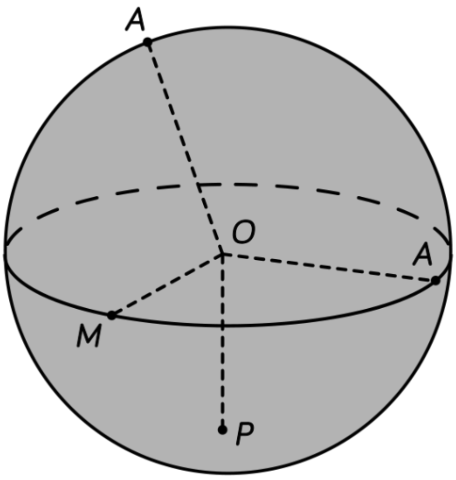
Une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $OM = r$.

Une boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$.

Exemple :

Les points A et M sont des points de la sphère de centre O.

Les points A, M, O et P sont des points de la boule de centre O.



Propriétés :

Une sphère de rayon r a pour aire :

$$A = 4 \times \pi \times r^2$$

Une boule de rayon r a pour volume :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Exemple :

L'aire d'une sphère de rayon 5,3 cm :

$$4 \times \pi \times 5{,}3^2 \approx 353\ cm^2$$

Le volume d'une boule de rayon 2,7m :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 2,7^3 \approx 82m^3$$

Exercice 1 :

Soit une sphère de centre O et de rayon 5 cm.

A ; B et C sont trois points de l'espace tels que :

AO = 5 cm ; OB = 12 cm ; CO = 2 cm.

1./ Pour chaque phrase, dire si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre choix :

a./ Le point A est un point de la sphère.

b./ Le point B est un point de la boule.

c./ Le point A n'est pas un point de la boule.

d./ Le point C est un point de la sphère.

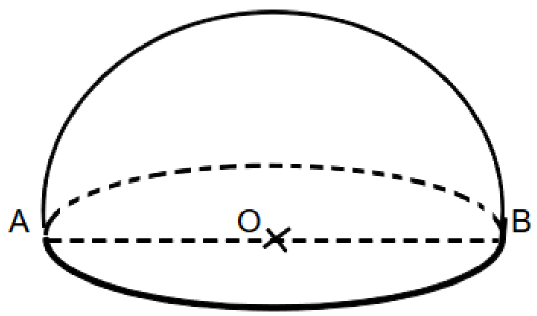
e./ Le point C est un point de la boule.

2./ Calculer l'aire de la sphère.

3./ Calculer le volume de la boule.

Exercice 2 :

1./ Calculer l'aire de la demi sphère suivante, sachant que AB = 4 cm. Donner une valeur approchée.



2./ Calculer le volume de la demi boule ci-dessus. Donner une valeur exacte.

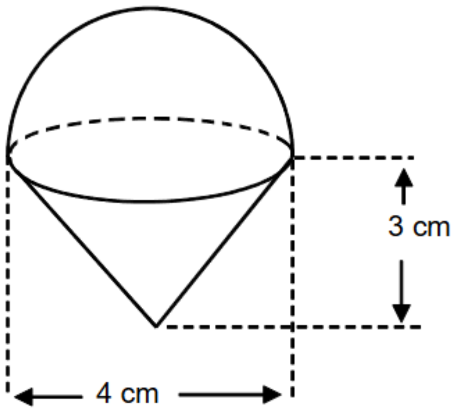
Exercice 3 :

Sachant que la superficie externe de la Terre est d'environ $5,101 \times 10^8\ km^2$, peut-on donner une approximation de son rayon ?

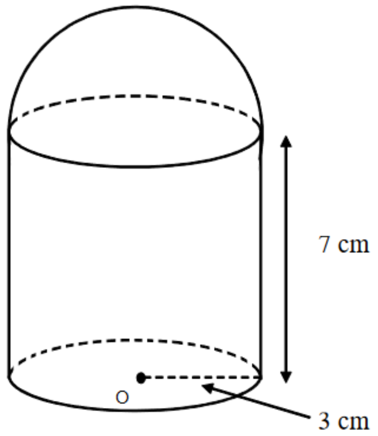
Exercice 4 :

Calculer les volumes des solides suivants, sachant que ce sont des demi-sphères dans chaque représentation :

a./



b./



CORRECTIONS :

Exercice 1 :

Soit une sphère de centre O et de rayon 5 cm.

A ; B et C sont trois points de l'espace tels que :

AO = 5 cm ; OB = 12 cm ; CO = 2 cm.

1./ a./ OA = 5 cm, ce qui est égal au rayon de la sphère/ Le point A appartient bien à la sphère. Oui l'affirmation est vraie.

b./ OB = 12 cm, ce qui est supérieur au rayon de la boule. B n'appartient pas à la boule. L'affirmation est fausse.

c./ A est un point de la sphère, c'est donc un point de la boule. L'affirmation est fausse.

d./ OC = 2 cm, ce qui est inférieur au rayon de la sphère. L'affirmation est fausse.

e./ OC = 2 cm, ce qui est inférieur au rayon de la boule. C appartient donc à la boule. L'affirmation est donc vraie.

2./

$$A = 4 \times \pi \times 5^2$$

$$A = 4 \times \pi \times 25$$

Valeur exacte !

$$A = 4 \times 25 \times \pi$$

$$A = 100 \times \pi \ cm^2$$

$$A \approx 314 cm^2$$

Valeur approchée !

L'aire de la sphère est d'environ 314 cm ².

3./

$$V = \frac{3}{4} \times \pi \times 5^3$$

$$V = \frac{3}{4} \times \pi \times 125$$

$$V = \frac{3}{4} \times 125 \times \pi$$

$$V = \frac{3 \times 125}{4} \times \pi$$

$$V = \frac{375}{4} \times \pi \ cm^3$$

Valeur exacte !

$$V \approx 294{,}375 \ cm^3$$

Valeur approchée !

Le volume de la boule est d'environ 294,375 cm^3.

<u>Exercice 2 :</u>

1./ Pour calculer l'aire de la demi sphère, nous devons d'abord trouver le rayon, puis calculer l'aire de la sphère, et la diviser par 2 (car c'est une **demi-**sphère).

Le rayon est de 2 cm, car son diamètre est de 4 cm.

$$A = \frac{4 \times \pi \times 2^2}{2}$$

$$A = \frac{16\pi}{2} = 8\pi \ cm^2$$

Valeur exacte !

$$A \approx 25{,}12 \ cm^2$$

Valeur approchée !

L'aire de la demi-sphère est d'environ 25,12 cm^2.

2./ Pour calculer le volume de la demi-boule, nous devons calculer le volume de la boule et le diviser par 2.

$$V = \frac{3}{4} \times \pi \times 2^3$$

$$V = \frac{3}{4} \times 8 \times \pi = 6\pi \ cm^3$$

Valeur exacte !

$$V \approx 18{,}84 \ cm^3$$

Valeur approchée !

Le volume de la demi-boule est d'environ 18,84 cm^3.

Exercice 3 :

Pour résoudre ce problème, nous devons faire une approximation. Nous modéliserons la Terre comme étant une sphère.

La superficie de la Terre correspond à l'aire de la sphère qui modélisera la Terre.

Nous savons que :

$$A = 4 \times \pi \times r^2$$

Dans cette expression, remplaçons les lettres par les valeurs connues :

$$A \approx 5{,}101 \times 10^8\ km^2$$

$$\pi \approx 3{,}14$$

$$5{,}101 \times 10^8 \approx 4 \times 3{,}14 \times r^2$$

$$5{,}101 \times 10^8 \approx 12{,}56 \times r^2$$

$$\frac{5{,}101 \times 10^8}{12{,}56} \approx r^2$$

$$0{,}41 \times 10^8 \approx r^2$$

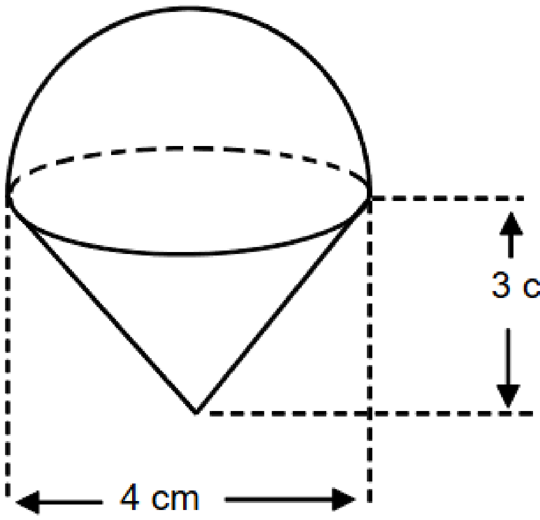
$$\sqrt{0{,}41 \times 10^8} \approx r$$

$$6403 \approx r$$

Le rayon de la Terre est d'environ 6403 km.

Exercice 4 :

a./ Pour calculer le volume de ce solide, nous devons d'abord calculer le volume du cône et ensuite, celui de la demi-sphère.



Volume de la demi-sphère :

$$V_{demisphère} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 2^3}{2}$$

$$V_{demisphère} = \frac{\frac{32}{3} \times \pi}{2}$$

$$V_{demisphère} = \frac{32}{3} \times \pi \times \frac{1}{2}$$

$$V_{demisphère} = \frac{16}{3} \times \pi\ cm^3 \approx 16{,}75\ cm^3$$

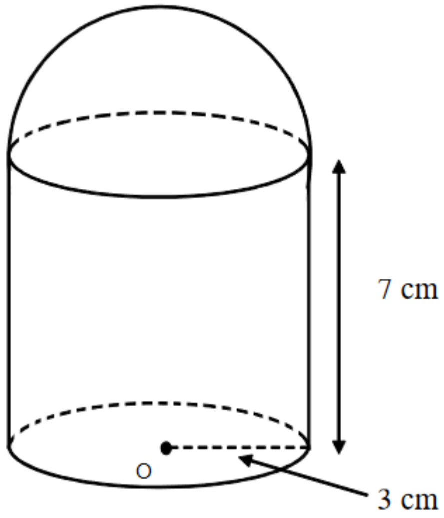
Volume du cône de révolution :

$$V_{cône} = \frac{\pi \times 2^2 \times 3}{3} = \pi \times 2^2 = 4\pi\ cm^3 \approx 12{,}56\ cm^3$$

Volume du solide :

$$V = V_{demisphère} + V_{cone} \approx 16{,}75 + 12{,}56 = 29{,}31\ cm^3$$

b./ Pour calculer le volume de ce solide, nous devons d'abord calculer le volume du cyindre et ensuite, celui de la demi-sphère.



Volume de la demi-sphère :

$$V_{demisphère} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3}{2}$$

$$V_{demisphère} = \frac{36 \times \pi}{2}$$

$$V_{demisphère} = 18 \times \pi \; cm^3 \approx 56,52 \; cm^3$$

Volume du cylindre :

$$V_{cylindre} = \pi \times 3^2 \times 7 = \pi \times 63 = 63\pi \; cm^3 \approx 197,82 \; cm^3$$

Volume du solide :

$$V = V_{demisphère} + V_{cylidre} \approx 56,52 + 197,82 = 254,34 \; cm^3$$

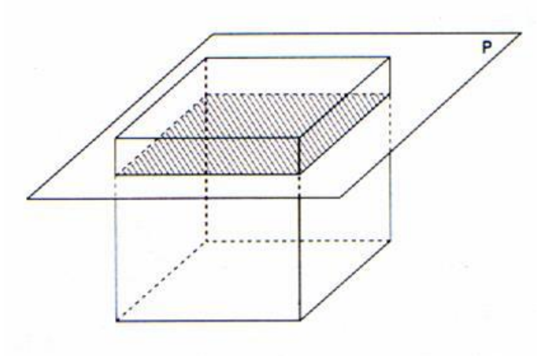
III./ Sections de solides par un plan

On appelle section d'un solide par un plan, l'intersection de ce solide avec ce plan.

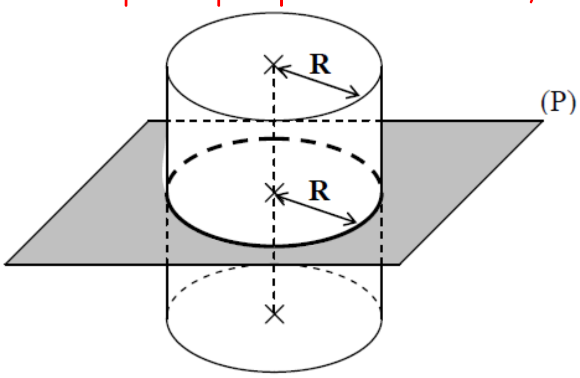
Propriétés admises :

La section d'un cube par un plan parallèle à une de ses faces est un carré de même dimension que cette face.

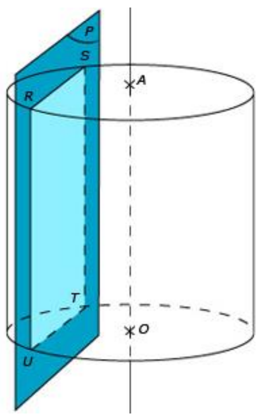
La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une de ses faces est un rectangle identique à cette face.



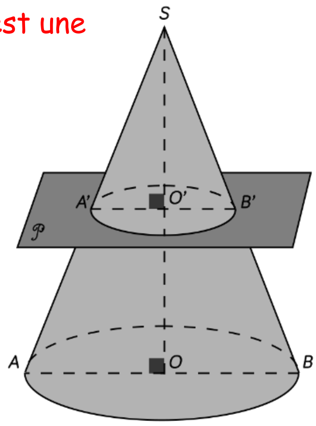
La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à sa base, est un disque identique à la base.

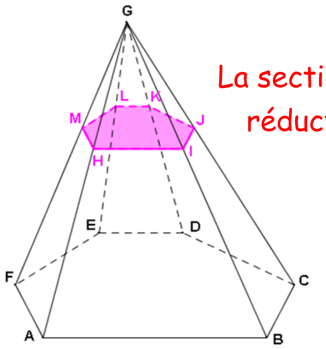


La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à sa base, est un rectangle.



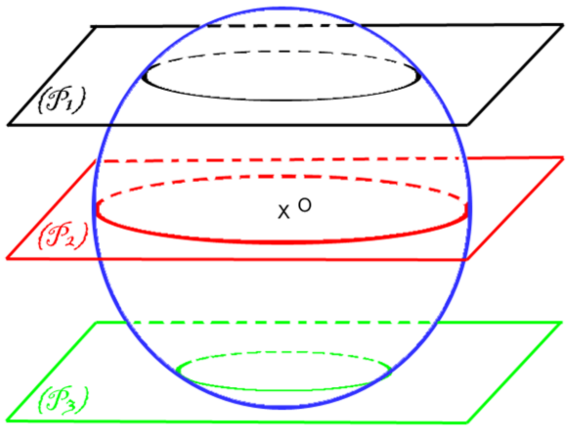
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque qui est une réduction de la base.





La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone qui est une réduction de la base.

La section d'une boule par un plan est un cercle.

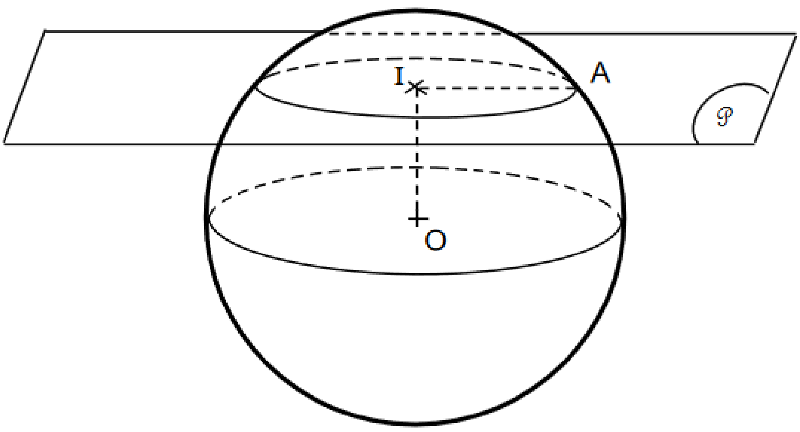


<u>Exercice 2.5 :</u>

Le plan $\mathcal{P}$ coupe la boule de centre O.

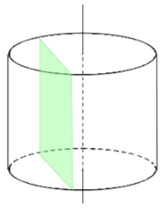
1./ Quelle est la nature de la section ?

2./ Sachant que la droite (OI) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, sachant que $IO = 5\ cm$ et $IA = 3{,}75\ cm$, calculer le rayon de la boule.



Exercice 2.6 :

On considère un cylindre de révolution de hauteur 5 cm dont le disque de base a un rayon de 4 cm. On coupe le cylindre par un plan perpendiculaire à la base, et qui le coupe à 2 cm du centre du disque.



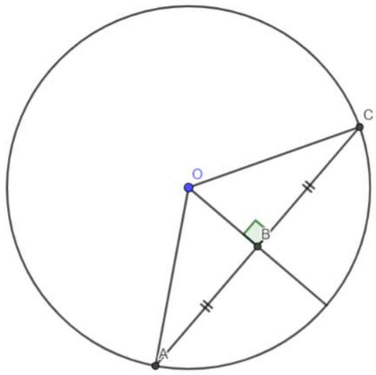
1./ Quelle est la nature de la section ?

2./ Pour trouver les dimensions de la section, on travaille sur le disque de base, dans lequel on veut calculer la longueur AC.

a./ Précisez sans justifier, les longueurs OC et OB.

b./ En déduire la longueur BC.

c./ Déterminez AC.



3./ Représenter en vraie gradeur la section du cylindre avec ce plan, et calculer son aire.

CORRECTIONS :

Exercice 2.5 :

1./ La section de la boule par le plan $\mathcal{P}$ est un disque.

2./ Le segment [OA] est un rayon de la boule.

Si (OI) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, alors le triangle OIA est un triangle rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OA^2 = IO^2 + IA^2$$

$$OA^2 = 5^2 + 3{,}75^2$$

$$OA^2 = 5 \times 5 + 3{,}75 \times 3{,}75$$

$$OA^2 = 25 + 14{,}0625 = 39{,}0625$$

$$OA = \sqrt{39{,}0625} = 6{,}25$$

Le rayon de la boule est de 6,25 cm.

Exercice 2.6 :

1./ La nature de la section du cylindre par le plan est un rectangle.

2./

a./ [OC] est un rayon de la base, donc $OC = 4cm$. On sait que la section se trouve à 2cm du centre du disque de la base, donc : $OB = 4 - 2 = 2\ cm$.

b./ Le triangle OBC est un triangle rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

$$4^2 = 2^2 + BC^2$$

$$4 \times 4 = 2 \times 2 + BC^2$$

$$16 = 4 + BC^2$$

$$16 - 4 = BC^2$$

$$12 = BC^2$$

$$\sqrt{12} = BC$$

$$3{,}46 \approx BC$$

c./ On sait que AB = BC, donc :

$$AC = AB + BC = 3{,}46 + 3{,}46 = 6{,}92\ cm$$

3./ Il faut dessiner un rectangle de longueur 6,9 cm environ et de largeur 5 cm.