Chapitre 4 : Introduction sur les fonctions

I./ Programmes de calcul

Activité :

Soit le programme du calcul suivant :

Choisir un nombre
Ajouter 10
Multiplier par 3
Soustraire 5
Afficher le résultat

1./ Effectuer le programme de calcul quand on choisit 12 en nombre de départ.

2./ Effectuer le programme de calcul quand on choisit -5 en nombre de départ.

3./ Effectuer le programme de calcul en choisissant x en nombre de départ.

4./ Que remarquez-vous ?

Correction :

1./

$$12$$

$$12 + 10 = 22$$

$$22 \times 3 = 66$$

$$66 - 5 = 61$$

$$61$$

2./

$$-5$$

$$-5 + 10 = 5$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 - 5 = 10$$

$$10$$

3./

$$x$$

$$x + 10$$

$$(x + 10) \times 3$$

$$(x + 10) \times 3 - 5$$

4./ On remarque que l'expression trouvée en question 3 et qui dépend de x, nous permet d'appliquer le programme de calcul en un seul calcul en ligne.

Exercice 1 :

Quelle expression dépendant de x correspond à ce programme de calcul ?

$Choisir\ un\ nombre$
$Ajouter\ 4$
$Multiplier\ par\ 2$
$Diviser\ par\ 3$

a./ $4 + x \times 2 \div 3$

b./ $\frac{x+4\times2}{3}$

c./ $(x + 4) \times 2 \div 3$

Correction :

C'est la troisième car la priorité opératoire se fait sur le calcul entre parenthèse $(x + 4)$, puis on fait les calculs de gauche à droite, soit la multiplication par 2, et enfin la division par 3. Ce n'est pas le deuxième car la multiplication par 2 se fera avant la somme $x + 4$.

Exercice 2 :

Soit le programme de calcul suivant :

$Choisir\ un\ nombre$
$Le\ multiplier\ par\ lui - même$
$Multiplier\ le\ résultat\ par -5$
$Ajouter\ 13\ au\ résultat$
$Multiplier\ le\ résultat\ par\ 2$

1./ Ecrire l'expression dépendant de x qui correspond à ce programme de calcul.

2./ Appliquer le programme pour $x = 0$.

3./ Appliquer le programme pour $x = 3$.

Correction :

1./ Voici l'expression qui dépend de x et qui correspond à ce programme de calcul :

$$2 \times (-5x^2 + 13)$$

Voici les étapes de calcul :

$$x$$

$$x \times x = x^2$$

$$x^2 \times (-5) = -5x^2$$

$$-5x^2 + 13$$

$$(-5x^2 + 13) \times 2 = 2 \times (-5x^2 + 13)$$

2./ Pour $x = 0$:

$$2 \times (-5 \times 0^2 + 13)$$

$$= 2 \times (0 + 13)$$

$$= 2 \times 13$$

$$= 26$$

3./ Pour $x = 3$

$$2 \times (-5 \times 3^2 + 13)$$

$$= 2 \times (-5 \times 9 + 13)$$

$$= 2 \times (-45 + 13)$$

$$= 2 \times (-32)$$

$$= -64$$

II./ Manipulations d'une écriture littérale

1./ Développer

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition et à la soustraction. Ce qui signifie que pour trois nombres réels k ; a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Ou

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Développer une expression produit, c'est la transformer en somme ou en différence.

Exemple : Développer les expressions :

$$7 \times (x + 1)$$

$$-5 \times (3 - y)$$

$$2x \times (4 + x)$$

Correction :

$$7 \times (x + 1) = 7 \times x + 7 \times 1 = 7x + 7$$

$$-5 \times (3 - y) = -5 \times 3 - (-5) \times y = -15 - (-5y) = -15 + 5y$$

$$2x \times (4 + x) = 2x \times 4 + 2x \times x = 2 \times x \times 4 + 2 \times x \times x = 8x + 2x^2$$

Exercice : développer les expressions suivantes :

$$A = -4 \times (2 + t)$$

$$B = (4 - 5m) \times 2m$$

$$C = (4x + 5) \times 4x$$

$$D = 2y \times (5 - 3y)$$

Correction :

$$A = -4 \times 2 + (-4) \times t = -8 - 4t$$

$$B = 4 \times 2m - 5m \times 2m = 8m - 5 \times 2 \times m \times m = 8m - 10m^2$$

$$C = 4x \times 4x + 5 \times 4x = 4 \times 4 \times x \times x + 5 \times 4 \times x = 16x^2 + 20x$$

$$D = 2y \times 5 - 2y \times 3y = 2 \times 5 \times y - 2 \times 3 \times y \times y = 10y - 6y^2$$

2./ Factorisation

Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme ou différence en produit.

Exemple :

$$4{,}2x - 1{,}3x = (4{,}2 - 1{,}3) \times x = 2{,}9 \times x = 2{,}9x$$

Exercice : Factoriser les expressions :

$$E = 3x + 5x^2$$

$$F = 4xy - 2x$$

$$G = 25t + 35t$$

$$H = 8 - 4x$$

$$I = 2x + 20$$

Correction :

$$E = 3x + 5x^2 = 3 \times x + 5 \times x \times x = (3 + 5 \times x) \times x = x(3 + 5x)$$

$$F = 4xy - 2x = x(4y - 2)$$

$$G = 25t + 35t = t(25 + 35) = t \times 60 = 60t$$

$$H = 8 - 4x = 4 \times 2 - 4 \times x = 4 \times (2 - x) = 4(2 - x)$$

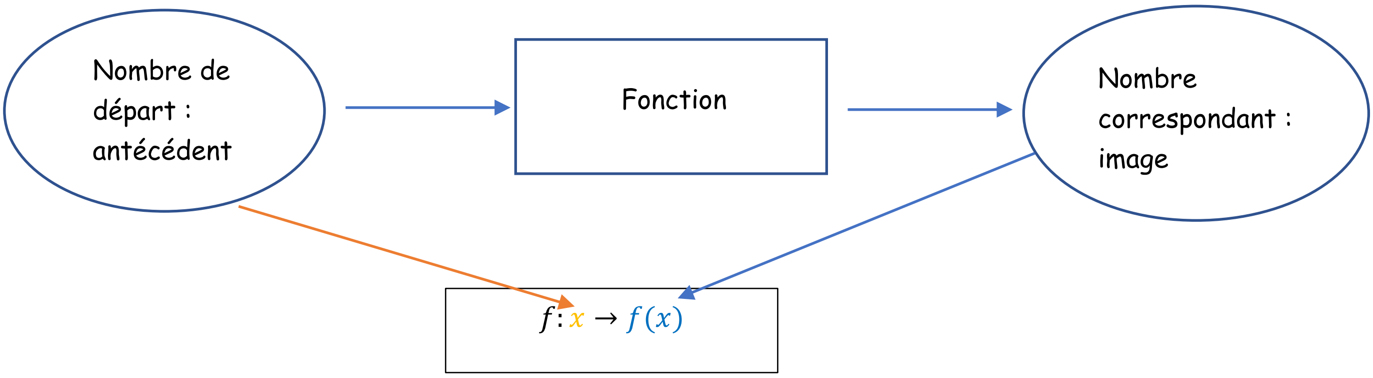
$$I = 2x + 20 = 2 \times x + 2 \times 10 = 2 \times (x + 10) = 2(x + 10)$$

III./ Introduction sur les fonctions

Voir la diapo en introduction.

Bilan :

Une fonction est un procédé qui, à un nombre appelé *antécédent*, fait correspondre un unique nombre appelé *image*.



Régulièrement, l'antécédent est appelé x, la fonction f, et l'image $f(x)$.

Cependant, n'importe quelle lettre peut être utilisée, et l'on croise souvent y *ou* z pour l'antécédent, g pour la fonction.

Exemple :

Considérons la fonction f telle que :

$$f : x \to x^2$$

Alors on peut écrire : $f(x) = x^2$

1./ Cherchons les valeurs de $f(x)$ pour $x = 0 \,;\, x = 1$ *et* $x = 2$.

$$f(0) = 0^2 = 0 \times 0 = 0$$

$$f(1) = 1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 2 \times 2 = 4$$

2./ Calculons $f(-1)$*et* $f(-2)$.

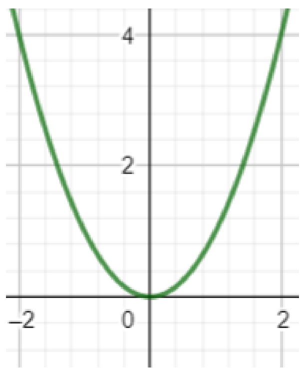
$$f(-1) = (-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

3./ Nous pouvons regrouper les données dans un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

4./ Nous pouvons regrouper ces données dans un graphique (les antécédents seront en abscisses et les images en ordonnées) :



Exercice 1 :

1./ Dans chaque cas, faire une phrase avec le mot antécédent :

a./ $f(2) = 5$

b./ $g: 4 \rightarrow (-6)$

2./ Dans chaque cas, faire une phrase avec le mot image :

c./ $h: (-2) \rightarrow 0$

d./ $k(0) = 55$

3./ Dans chaque cas, écrire sous la forme $f(a) = i$:

e./ 3 a pour image 5 par la fonction i.

f./ -5 est l'image de 4 par la fonction j.

g./ 2 est un antécédent de 33 par la fonction l.

h./ -11 a pour antécédent 0 par la fonction m.

Exercice 2 :

Soit S une fonction représentant le salaire moyen en euro dans une entreprise en fonction de l'âge a des salariés :

a	20	25	30	35	40	45	50	55	60
S(a)	1500	1700	1900	2050	2175	2350	2225	2050	2600

1./ Ecrire une phrase en français pour expliquer ce que signifie $S(20)$ dans cette situation.

2./ Combien vaut $S(35)$?

3./ Quelle est l'image de 40 par la fonction S ?

5./ Donner un antécédent de 1900 par la fonction S.

6./ Donner tous les antécédents de 2050 par la fonction S.

Exercice 3 :

En électricité, on dit que la tension s'obtient en effectuant le produit de la résistance par l'intensité :

$$U = R \times I$$

Où : $U : Tension\ (V)$

$R : Résistance\ (Ohm)$

$I : Intensité\ (A)$

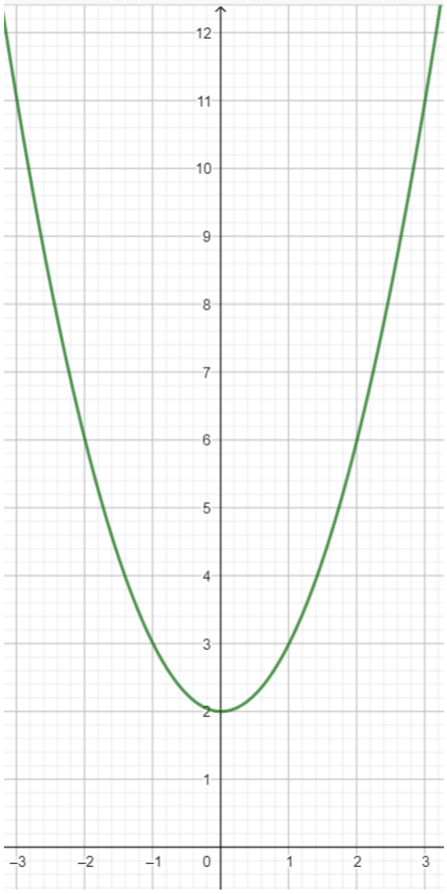
Thomas veut calculer la tension dans un système électrique où l'intensité est de 20 A, mais où la résistance varie.

Il note la fonction U telle que :

$$U: R \rightarrow 20 \times R$$

1./ Calculer la tension pour $R = 0\ Ohm$, pour $R = 10\ Ohm$ et pour $R = 20\ Ohm$.

2./ Thomas trouve une tension de 60 V. Quelle résistance a-t-il utilisé ?



<u>Exercice 4 :</u>

Soit la fonction $f: x \rightarrow 2 + x^2$ représentée ci-contre :

1./ Combien d'images semblent négatives ?

2./ Quelle est l'image de 0 par la fonction f ?

3./ Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?

4./ Citez tous les antécédents de 6 par la fonction f.

5./ Combien 2 a-t-il d'antécédents ?

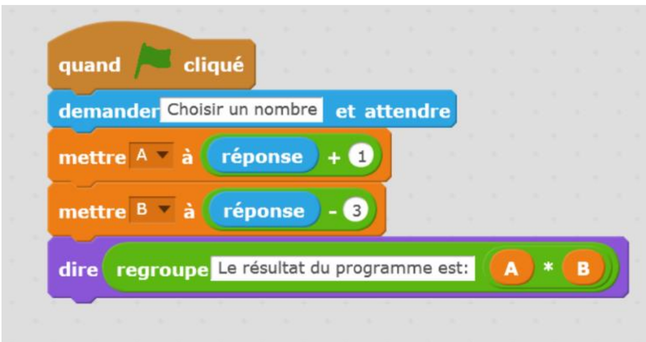
6./ Combien d'image n'ont qu'un antécédents ?

7./ Calculer $f(5) et\ f(-4)$.

8./ Par le calcul trouver un antécédent de 38.

<u>Exercice 5 :</u>

Soit le programme Scratch suivant :



1./ Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	-10	-1	0	3
Résultat obtenu				

2./ On note f la fonction qui au nombre choisi donne le résultat du programme. Donner une expression littérale de la fonction f.

Correction :

Exercice 1 :

1./ a./ 2 est l'antécédent de 5 par la fonction f.

b./ -6 a pour antécédent 4 par la fonction g.

2./ c./ 0 est l'image de -2 par la fonction h.

d./ 0 a pour image 55 par la fonction k.

3./ e./ $i(3) = 5$

f./ $j(4) = -5$

g./ $l(2) = 33$

h./ $m(0) = -11$

Exercice 2 :

1./ S(20)=1500 signifie que dans l'entreprise, le salaire moyen des personnes qui ont 20 ans est de 1500 € par mois.

2./ S(35) = 2050.

3./ L'image de 40 par la fonction S est 2175.

4./ Un antécédent de 1900 par la fonction S est 30.

5./ 2050 a pour antécédents 35 et 55.

Exercice 3 :

1./

$$U(0) = 20 \times 0 = 0\ V$$

$$U(10) = 20 \times 10 = 200\ V$$

$$U(20) = 20 \times 20 = 20^2 = 400\ V$$

2./ Si Thomas a trouvé une tension de 60 V alors :

$$U(R) = 60$$

$$60 = 20 \times R$$

$$\frac{60}{20} = R = 3\ Ohm$$

Thomas a utilisé une résistance de 3 Ohm.

Exercice 4 :

1./ Aucune image semble négative.

2./ L'image de 0 par la fonction f est 2.

3./ L'image de 2 par la fonction f est 6.

4./ Les antécédents de 6 par la fonction f sont -2 et 2.

5./ 2 n'a qu'un seul antécédent qui est 0.

6./ On sait que $f(x) = 2 + x^2$

$$f(5) = 2 + 5^2 = 2 + 25 = 27$$

$$f(-4) = 2 + (-4)^2 = 2 + 16 = 18$$

7./

$$f(x) = 38$$

$$2 + x^2 = 38$$

$$x^2 = 38 - 2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

6 est un antécédent de 38. On peut en conclure que -6 en est également un.

Exercice 5 :

1./

Nombre choisi	-10	-1	0	3
Résultat obtenu	117	0	-3	0

2./ Si x est le nombre de départ alors :

$$f(x) = (x + 1) \times (x - 3)$$