Chapitre 5 : Théorème de Thalès

I./ Histoire du Théorème

Thalès de Milet serait né vers -625 avant notre ère à Milet (cité antique Grecque se situant dans la région de Ionie, en actuelle Turquie).

Il aurait été le professeur de Pythagore.

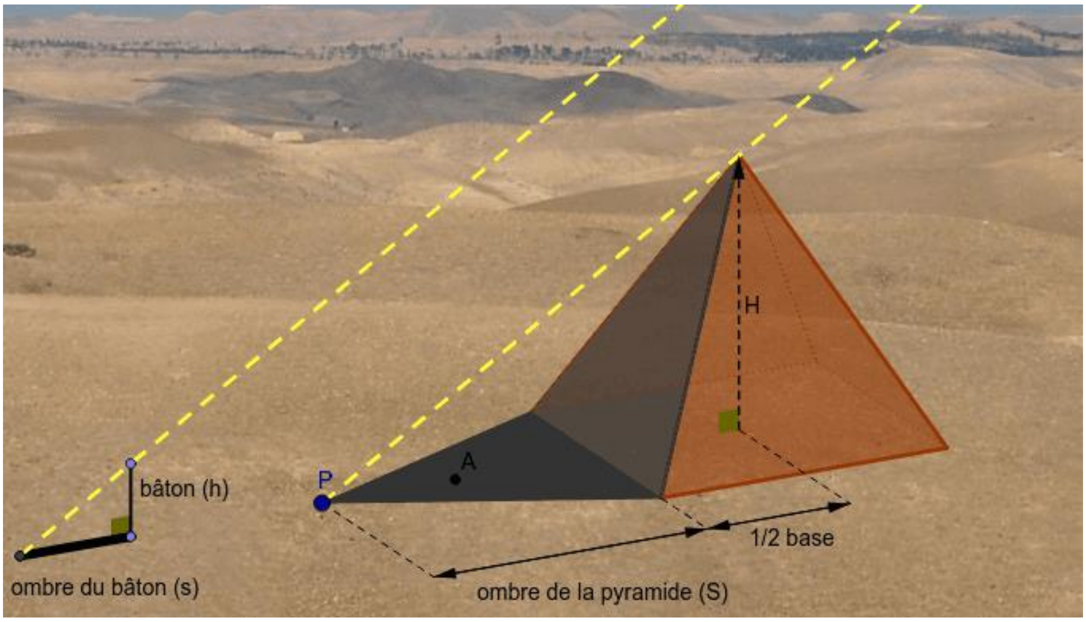
Thalès de Milet aurait suivi une formation de philosophe et scientifique en Egypte (d'après des écrits retrouvés).

La légende dit qu'un jour Thalès aurait décidé de calculer la hauteur d'une pyramide Egyptienne. Pour cela, il mesure la longueur de l'ombre de la pyramide, et de celle d'un bâton planté perpendiculairement au sol. Il mesure ensuite le bâton. Puis il utilise un théorème qui aurait alors été déjà connu des Babyloniens et des Egyptiens. Il aurait ainsi obtenu la hauteur de la pyramide.

Mais alors, le Théorème de Thalès n'aurait pas été découvert par Thalès ? Certains écrits tendent vers cette hypothèse. Mais ce qui est certain, c'est que c'est bien le premier à avoir mis des mots sur ce théorème. Des travaux datés entre -1900 et -1600 retrouvés sur une tablette en argile montreraient que le script avait déjà des connaissances semblables à ce que l'on appelle aujourd'hui « Le théorème de Thalès ». D'ailleurs, dans d'autres pays, le théorème ne porte pas le nom du célèbre Mathématicien philosophe. Les anglais l'appellent « intercept theorem » qui peut se traduire par « théorème d'interception » et les allemands l'appellent « Strahlensatz » qui peut se traduire par « Le théorème des rayons ».

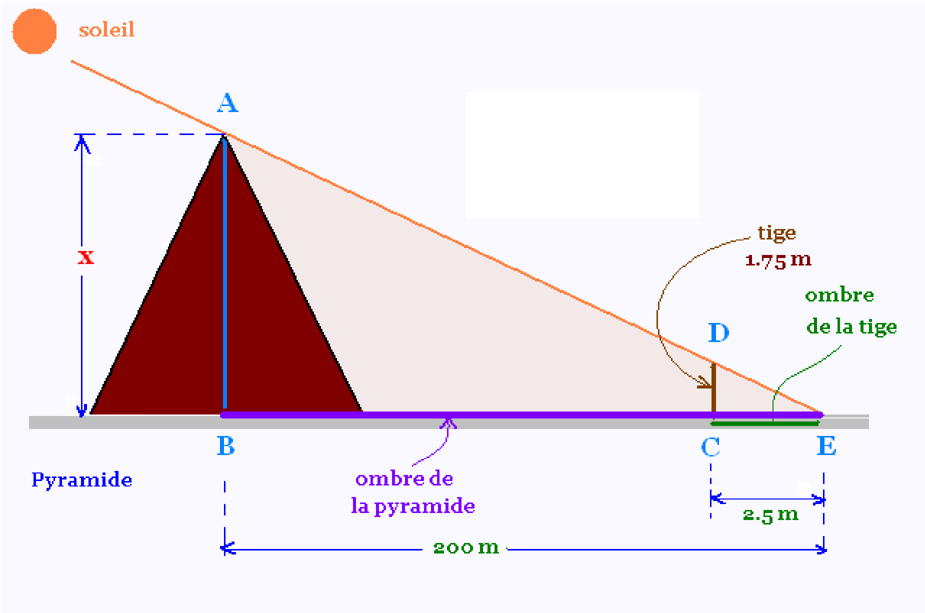
Mais alors comment Thalès a-t-il utilisé ce théorème pour calculer la hauteur de la pyramide ?

Tout simplement en établissant un lien de proportionnalité entre la hauteur de la pyramide et celle du bâton d'une part, et entre l'ombre du bâton et celle de la pyramide ajoutée à la demie largeur de la pyramide.



Application : En vous aidant des informations apportées dans le document distribué précédemment par le professeur, répondre aux questions suivantes.

Thalès avait un assistant qui l'aidait dans ses travaux. Mettez-vous à la place de l'assistant, et aidez Thalès à calculer la hauteur de la Pyramide.



Vous mesurez la taille du bâton et vous trouvez 1,75 m. Vous mesurez son ombre et trouvez 2,5 m.

Vous mesurez la longueur de l'ombre de la Pyramide, et en ajoutant cette longueur à la demie largeur de la Pyramide, vous trouvez 200 m.

1./ Quelle relation lie la taille du bâton, la taille de la pyramide et la longueur de leurs ombres d'après le document précédent ?

2./ Recopier et remplir le tableau suivant avec les valeurs connues :

	Bâton	Pyramide
Taille de l'objet		
Taille de l'ombre		

3./ En vous aidant du tableau et de la réponse à la première question, calculer la hauteur de la pyramide.

4./ D'après le schéma, comment semblent être les segments représentants le bâton et la hauteur de la pyramide l'un par rapport à l'autre ?

5./ En utilisant la réponse obtenue à la question 4, essayez avec vos propres mots de définir ce qu'est le théorème de Thalès.

Correction :

1./ D'après le document précédent, les tailles du bâton de la pyramide, et de leurs ombres sont proportionnelles.

2./

	Bâton	Pyramide
Taille de l'objet	1,75 m	?
Taille de l'ombre	2,5 m	200 m

3./ On sait qu'il y a une relation de proportionnalité, on peut donc faire un produit en croix :

$$\frac{1{,}75 \times 200}{2{,}5} = 140\ m$$

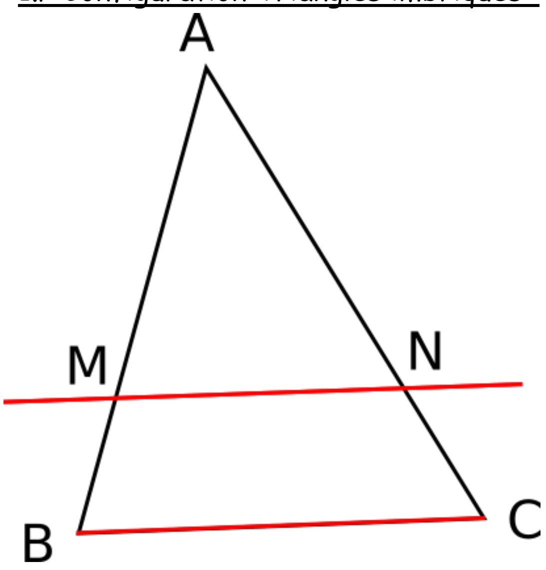
La pyramide mesure 140 mètres.

4./ Les segments représentants la hauteur du bâton et la hauteur de la pyramide emblent être parallèles.

II./ Théorème de Thalès

Théorème de Thalès : Si deux droites parallèles coupent deux droites sécantes, alors elles déterminent deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

1./ Configuration Triangles imbriqués :



Soit la configuration ci-contre. On sait que (MN) et (BC) sont parallèles.

Rédaction pour les démonstrations concernant le théorème de Thalès :

Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

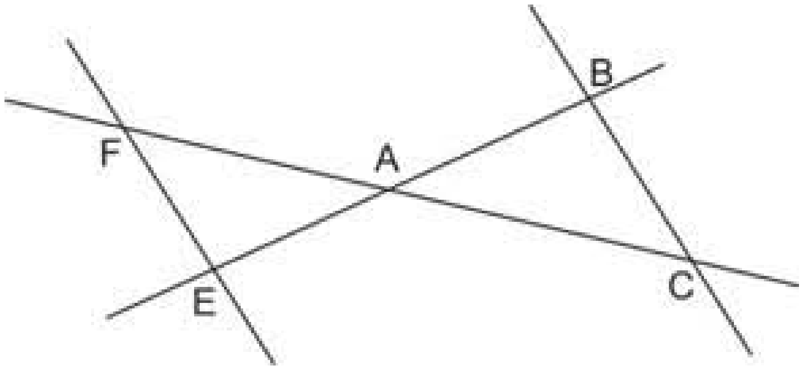
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad ou \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

Autre rédaction possible :

Les points B, M et A sont alignés. Les points C, N et A sont alignés. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad ou \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

2./ Configuration en papillon :



Soit la figure ci-contre. On sait que (BC) et (FE) sont parallèles.

Rédaction pour une démonstration utilisant le théorème de Thalès :

Les droites (FC) et (EB) sont sécantes en A.
Les droites (FE) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{BC} \quad ou \quad \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{FE}$$

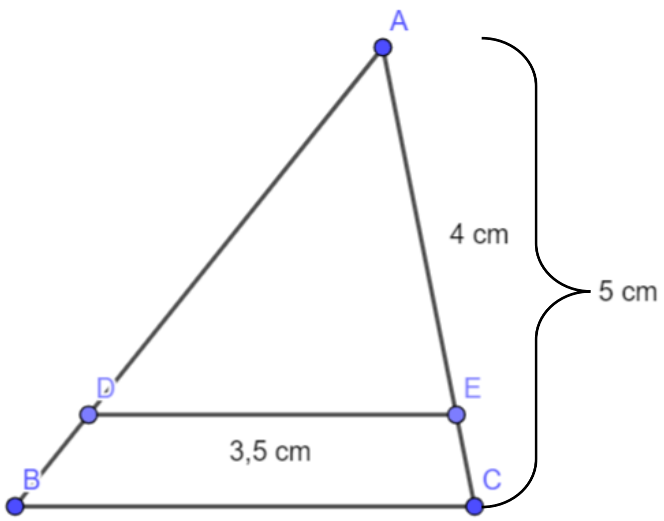
Autre rédaction possible :

Les points F, A et C sont alignés. Les points B, A et E sont alignés. Les droites (FE) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{BC} \quad ou \quad \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{FE}$$

Remarque : Comme pour l'activité, le théorème de Thalès nous permettra de calculer des longueurs manquantes.

Exercice d'application n°1 :



Soit la figure ci-contre telle que :

$$(DE) \parallel (BC)$$

On sait que :

$$AE = 4\ cm\ ; DE = 3,5\ cm\ ; AC = 5\ cm$$

Calculer la longueur du segment [BC] en utilisant le théorème de Thalès.

Correction :

Les droites (BD) et (EC) sont sécantes en A (ou « B, D et A sont alignés. E, C et A sont aligné »).

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{5} = \frac{3{,}5}{BC}$$

$$4 \times BC = 5 \times 3{,}5$$

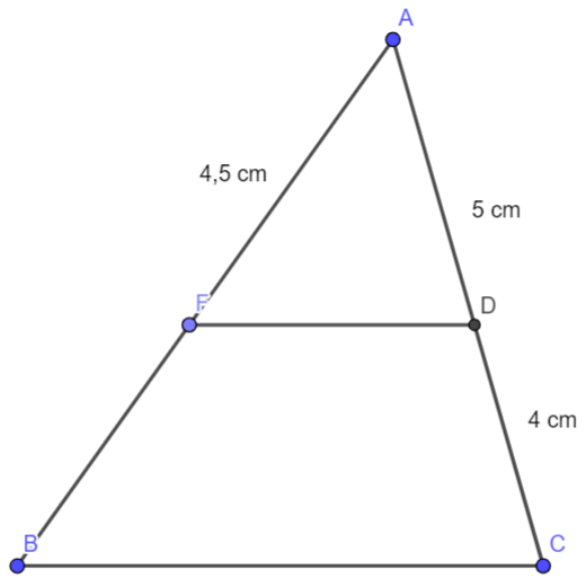
$$4 \times BC = 17{,}5$$

$$BC = \frac{17{,}5}{4} = 4{,}375\ cm$$

Le segment [BC] mesure 4,375 cm.

Remarque : On ne peut pas calculer AD ou AB.

Exercice d'application n°2 :



Soit la figure ci-contre telle que :

$$(FD) \parallel (BC)$$

$$AD = 5\ cm\ ;\ DC = 4\ cm\ ;\ AF = 4{,}5\ cm$$

Calculer la longueur du segment [AB].

Correction :

Les droites (BF) et (CD) sont sécantes en A (ou « Les points B, F et A sont alignés. Les points C, D et A sont alignés »).

Les droites (FD) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FD}{BC}$$

Ici AC n'est pas donné par l'énoncé, mais :

$$AC = AD + DC = 5 + 4 = 9\ cm.$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FD}{BC}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{4{,}5}{AB} = \frac{FD}{BC}$$

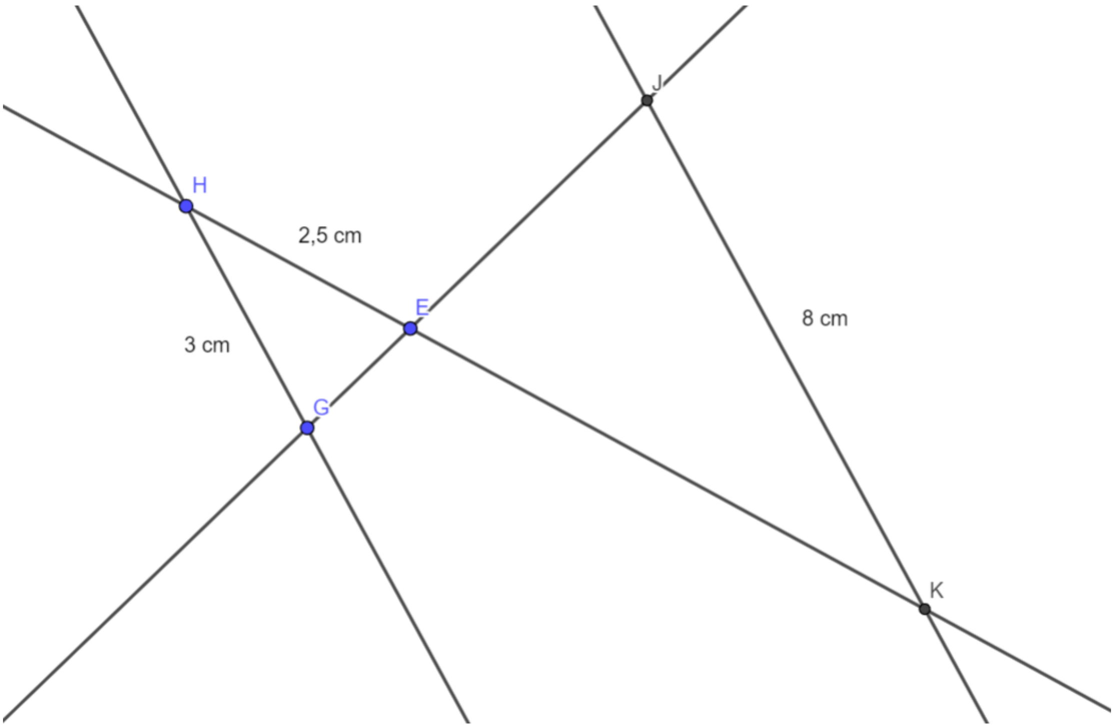
$$5 \times AB = 9 \times 4{,}5$$

$$5 \times AB = 40{,}5$$

$$AB = \frac{40{,}5}{5} = 8{,}1\ cm$$

Le segment [AB] mesure 8,1 cm.

Exercice d'application n°3 :



Soit la figure ci-dessus telle que :

$$(HG) \parallel (JK)$$

Calculer la longueur du segment [EK] en utilisant le théorème de Thalès.

Correction :

Les droites (HK) et (JG) sont sécantes en E (ou « Les points H, E et K sont alignés. Les points J, E et G sont alignés »).

Les droites (HG) et (JK) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EG}{EJ} = \frac{EH}{EK} = \frac{HG}{JK}$$

$$\frac{EG}{EJ} = \frac{2,5}{EK} = \frac{3}{8}$$

$$2,5 \times 8 = EK \times 3$$

$$20 = EK \times 3$$

$$\frac{20}{3} = EK$$

$$EK \approx 6,7\ cm$$

Le segment [EK] mesure environ 6,7 cm.

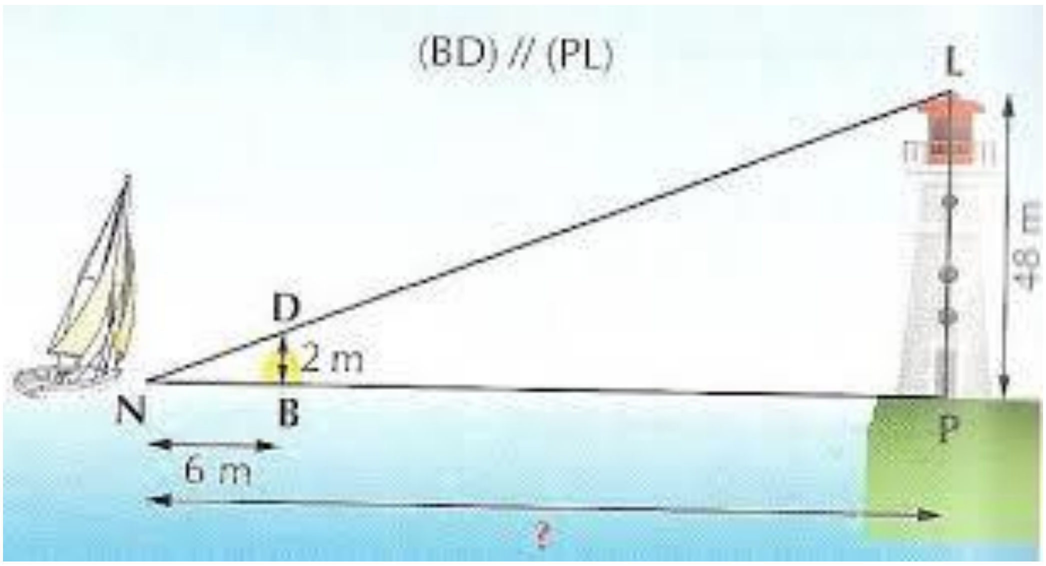
Exercices : Théorème de Thalès et théorème de Pythagore

Exercice 1 :

Quentin navigue sur le voilier de son frère. Il se lance alors un défi. Calculer longueur qui le sépare du phare qui se situe non loin de là où il a amarré.

Il sait qu'il se situe à environ 6 mètres d'une bouée jaune qui mesure elle-même 2 mètres de hauteur. Il ait également que le phare mesure 48 mètres de hauteur.

Ci-dessous, un schéma représentant la situation :



Quelle distance le sépare du phare ?

Correction :

D'après le schéma ci-dessus, on observe que les droites (PB) et (LB) sont sécantes en N (ou « les points N, B et P sont alignés, et les points N, D et L le sont aussi »). On observe que les droites (DB) et (LP) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{NB}{NP} = \frac{ND}{NL} = \frac{DB}{PL}$$

$$\frac{NB}{NP} = \frac{DB}{DL}$$

$$\frac{6}{NP} = \frac{2}{48}$$

$$NP \times 2 = 6 \times 48$$

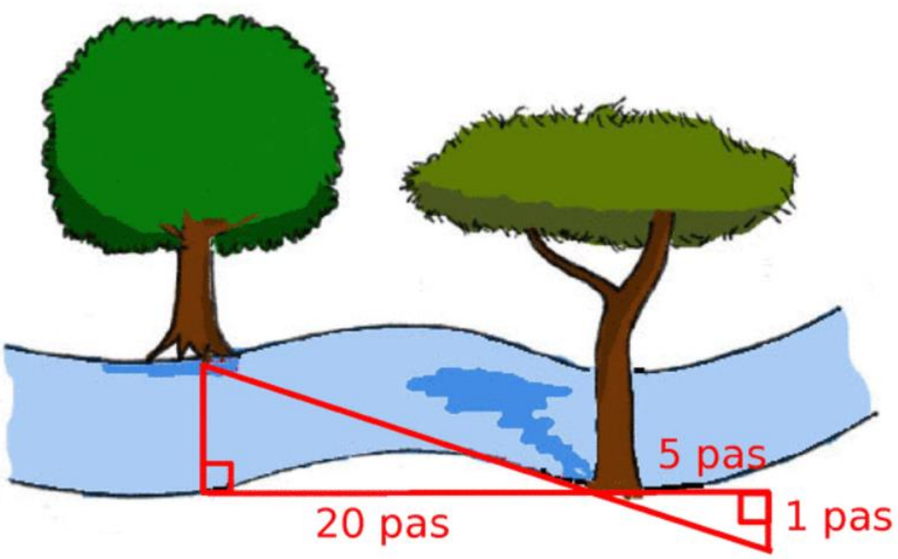
$$NP = \frac{6 \times 48}{2}$$

$$NP = \frac{288}{2} = 144\ m$$

Quentin et son voilier se situent à 144 mètres environ du phare.

Exercice 2 :

Samira va se promener à la montagne Sainte Victoire, à l'Est d'Aix-en-Provence. Elle passe au bord de la rivière la Cause. Elle se demande quelle est la largeur de la rivière. Elle prend des repères en comptant ses pas. Voici le schéma qu'elle dessine :



1./ Pouvons-nous dire que nous sommes dans une configuration nous permettant d'utiliser le théorème de Thalès ? Justifier votre réponse.

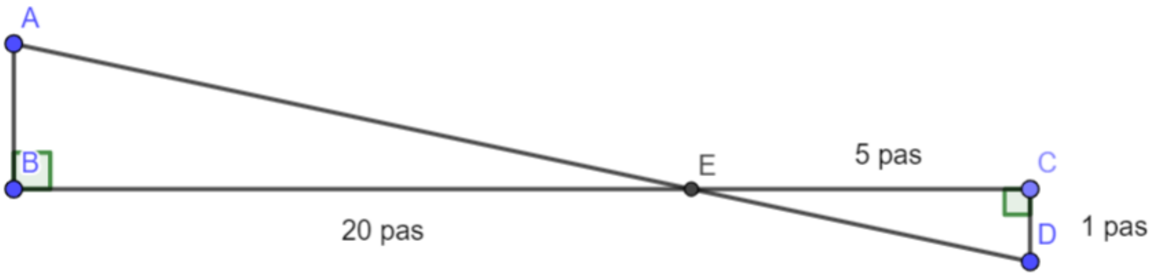
2./ Combien de pas mesure la largeur de la rivière La Cause ? Justifier par le calcul.

3./ Sachant qu'un pas de Samira mesure 60 cm, calculer la valeur approximative de la largeur de la rivière.

Indice : Nommez les points qui ne le sont pas.

Correction :

1./ En nommant les points ainsi voici le nouveau schéma :



Si deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une troisième droite (BC), alors (AB) et (CD) sont parallèles.

On sait que :

- Les points B, E et C sont alignés ainsi que les points A, E et D (ou « Les droites (BC) et (AD) sont sécantes en E »).
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Thalès.

2./ D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BA}{CD}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{BA}{1}$$

$$BA = \frac{20 \times 1}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

La largeur de la rivière La Cause est de 4 pas.

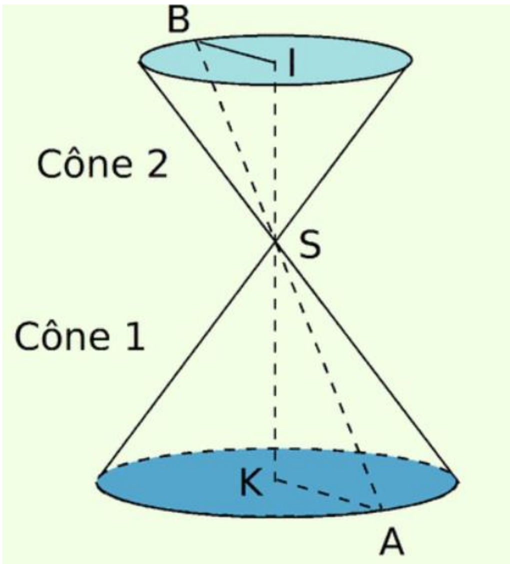
3./ Sachant qu'un pas mesure 60 cm, alors :

$$60 \times 4 = 240\ cm = 2{,}4\ m$$

La rivière a une largeur de 2,4 mètres.

Exercice 3 :

Soit un sablier composé de deux cônes de révolution comme dans le schéma ci-contre.



On sait que :

- La hauteur du cône 1 est 6 cm ;
- Le rayon du cône 1 est 4,5 cm ;
- SB = 5 cm ;
- Les droites (BI) et (KA) sont parallèles ;
- $[KA] \perp [SK]$.

1./ Calculer la hauteur du sablier.

2./ Calculer le rayon du cône 2.

3./ Quel est le volume du sablier

Questions bonus (pour répondre à la question 1):

1./ On remarque qu'il nous manque à chaque fois une longueur. On peut donc commencer par calculer la longueur de [SA] en nous aidant du théorème de Pythagore

2./ Ensuite on calcule la longueur de [SI] en nous aidant du théorème de Thalès.

3./ Enfin on ajoute SK et SI et on obtient la hauteur du sablier.

Correction :

1./ Le triangle SKA est rectangle en K, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$SA^2 = KA^2 + KS^2$$

$$SA^2 = 4{,}5^2 + 6^2$$

$$SA^2 = 20{,}25 + 36$$

$$SA^2 = 56{,}25$$

$$SA = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5\ cm$$

Les points S, A et B sont alignés, ainsi que les points S, I et K (ou « Les droites (AB) et (IK) sont sécantes en S »).

Les droites (KA) et (BI) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BI}{KA} = \frac{IS}{SK} = \frac{BS}{SA}$$

$$\frac{IS}{SK} = \frac{BS}{SA}$$

$$\frac{IS}{6} = \frac{5}{7{,}5}$$

$$IS = \frac{6 \times 5}{7{,}5} = 4\ cm$$

Pour calculer la hauteur du sablier on fait :

$$IS + SK = 4 + 6 = 10\ cm$$

La hauteur du sablier est 10 cm.

2./ On a montré précédemment que :

$$\frac{BI}{KA} = \frac{IS}{SK} = \frac{BS}{SA}$$

$$\frac{BI}{KA} = \frac{IS}{SK}$$

$$\frac{BI}{4{,}5} = \frac{4}{6}$$

$$BI = \frac{4{,}5 \times 4}{6} = 3\ cm$$

Le rayon du cône 2 est 3 cm.

3./ On rappelle la formule du volume d'un cône de révolution :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

Où

$$r\text{: } rayon\ de\ la\ base$$

$$h\text{: } hauteur\ du\ cône\ de\ révolution$$

Pour calculer le volume du sablier, on doit calculer indépendamment le volume de chaque cône :

Cône 1 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 6$$

$$\mathcal{V} \approx 127{,}2\ cm^3$$

Cône 2 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4$$

$$\mathcal{V} \approx 37{,}7\ cm^3$$

Volume du sablier :

$$\mathcal{V} \approx 127{,}2 + 37{,}7 \approx 164{,}9\ cm^3$$

AVEC LES VALEURS EXACTES :

Cône 1 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4{,}5^2 \times 6$$

$$\mathcal{V} = \frac{81}{2}\pi \; cm^3$$

Cône 2 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4$$

$$\mathcal{V} = 12\pi \; cm^3$$

Volume du sablier :

$$\frac{81}{2}\pi + 12\pi = \frac{105}{2}\pi \; \approx 164{,}9 \; cm^3$$