

Chapitre 3 : Proportionnalité

I./ Rappel : Produit en croix, pourcentages

Si nous sommes dans une situation de proportionnalité et que les données sont regroupées dans un tableau de proportionnalité, alors les produits en croix sont égaux. En connaissant cette règle, nous pouvons trouver une valeur manquante dans un tableau de proportionnalité.

Exemple :

Monsieur Nacio va acheter des clémentines chez le primeur. La pancarte annonce que les 2,3 kg de clémentines coûtent 7,5 €. Il en achète 3,7 kg. Combien va-t-il payer ?

Masse (kg)	Prix des clémentines (€)
2,3	7,5
3,7	

Appliquons la règle de trois :

$$\frac{3,7 \times 7,5}{2,3} = \frac{27,75}{2,3} \approx 12,06$$

Monsieur Nacio paiera environ 12,06 € ses clémentines.

Pour calculer un pourcentage ou en appliquer un, il suffit de connaître le principe de la règle de trois.

Exemple n°1 : Calcul d'un pourcentage

Dans la salle de sport d'Elarif, il y a 165 adhérents. Parmi ces adhérents, il y a 99 femmes.

Quel est le pourcentage de femmes et d'hommes inscrits à la salle de sport d'Elarif ?

Nous pouvons réaliser un ou deux tableaux :

	Adhérents	Femmes
Effectif	165	99
Pourcentage	100	

$$\frac{100 \times 99}{165} = \frac{9900}{165} = 60$$

Il y a 60% de femmes inscrites à la salle de sport d'Elarif.

Exemple n°2 : Appliquer un pourcentage

Dans l'école de danse de Monsieur Nacio, il y a 265 adhérents. Le pourcentage de femmes adhérentes à l'école est de 60%.

1./ Quel est le nombre de femmes adhérentes à l'école de danse ?

2./ Quel est le nombre d'hommes adhérents à l'école de danse ?

1./ Une fois de plus nous pouvons appliquer la règle de trois :

	Adhérents	Femmes
Effectif	265	
Pourcentage	100	60

$$\frac{265 \times 60}{100} = \frac{15900}{100} = 159$$

Il y a 159 femmes adhérentes à l'école de danse.

2./ Sachant qu'il y a au total 265 adhérents, nous pouvons calculer le nombre d'hommes :

$$265 - 159 = 106$$

Il y a 106 hommes à l'école de danse.

Quand on augmente une valeur de $t\%$ on multiplie la valeur par $1 + \frac{t}{100}$.

Exemple : Le prix de 250 grammes de tofu qui coûtait 2,5€ en Janvier 2020 a augmenté de 15% en janvier 2021.

$$2,5 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 2,5 \times 1,15 = 2,875 \text{ €}$$

Les 250 grammes de tofu coûtent 2,875 € en Janvier 2021.

Quand on diminue une valeur de $t\%$ on multiplie la valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Exemple : Une veste en jean qui coûte 125 € est soldée à 25%.

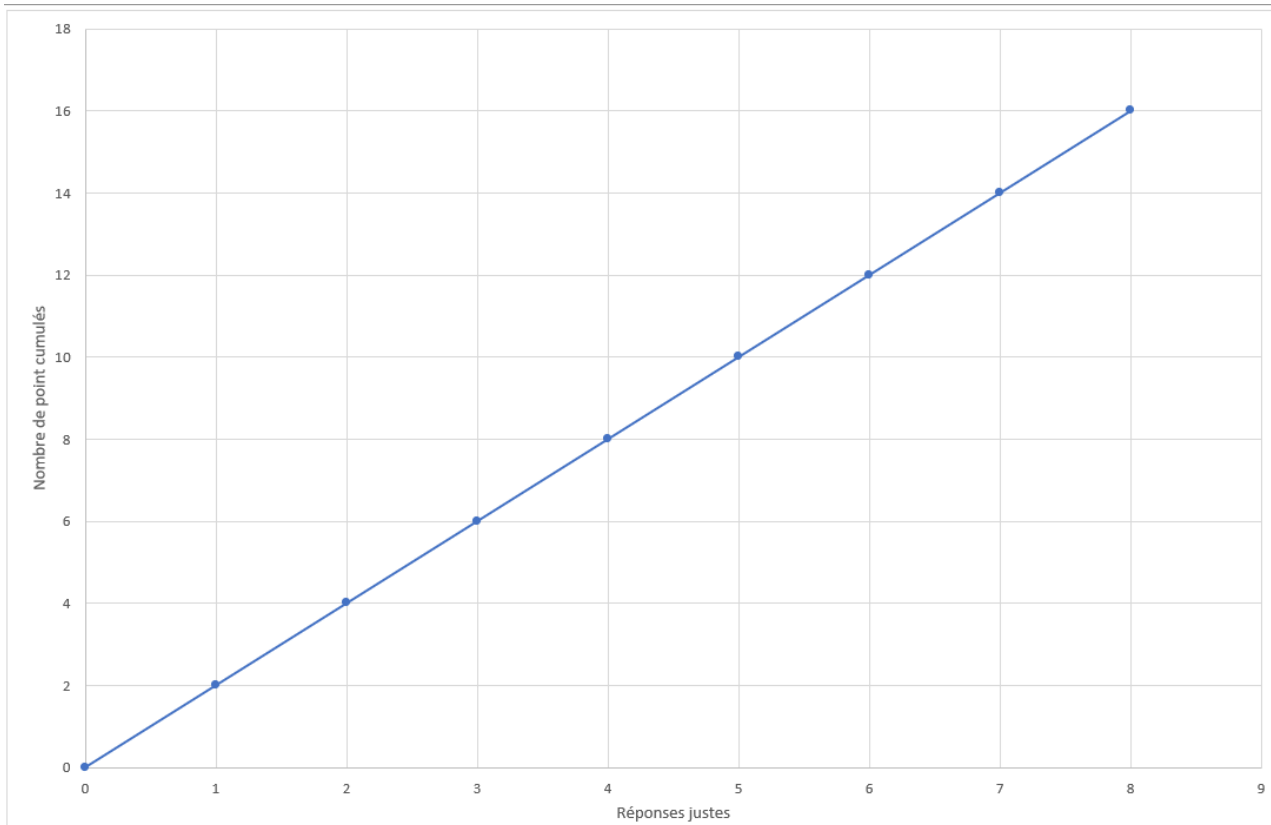
$$125 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 125 \times 0,75 = 93,75 \text{ €}$$

La veste coûte 93,75 € pendant les soldes.

II./ Représentation graphique

Dans un jeu télévisé, le candidat doit répondre à différentes questions. Tant qu'il répond juste, il continue de se faire questionner. S'il perd c'est au candidat adverse de répondre aux questions.

Ci-dessous, une représentation graphique des points cumulés par un candidat en fonction des réponses justes qu'il a trouvé :



1./ Combien de points le candidat a-t-il au total quand il a réussi à répondre à 5 réponses justes.

Le candidat a 10 points.

2./ Peut-on trouver une formule permettant de calculer le nombre de points que le candidat aura selon le nombre de réponses justes ?

Posons : $x =$ nombre de réponses justes

Posons : $N =$ nombre de points

$$N = 2 \times x = 2x$$

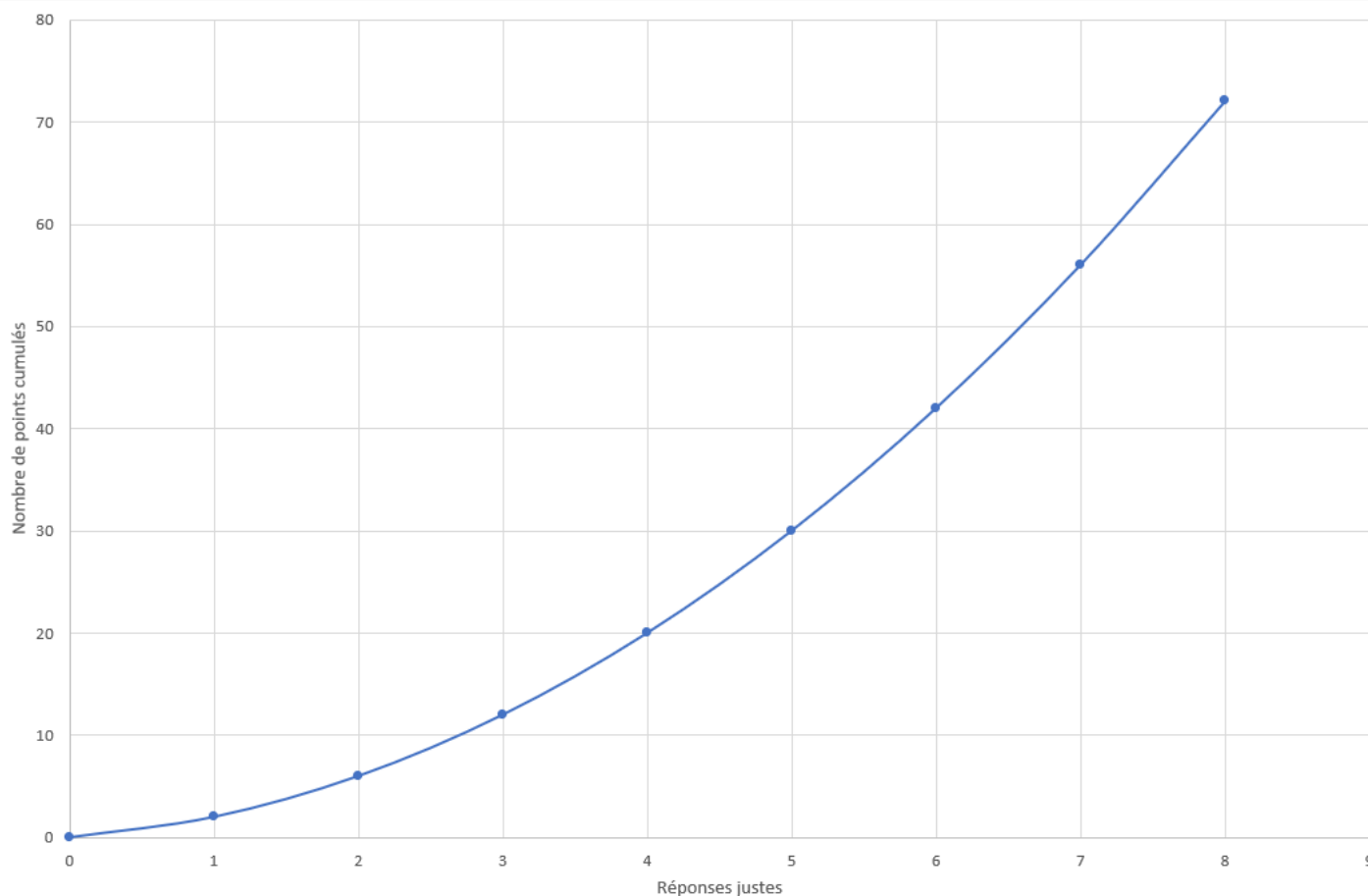
3./ Combien le candidat aura de points au bout de 12 réponses justes ?

$$12 \times 2 = 24$$

Le candidat aura 24 points.

Lors d'un évènement en prime time, l'émission télévisé décide de changer les règles. Une réponse juste apporte en nombre de point le double du nombre de réponse justes cumulées. C'est-à-dire, si le candidat répond juste à la première question, il gagne deux points, s'il répond juste à la deuxième question il gagne quatre points, ce qui lui en fera six au total, s'il répond à la troisième juste, il gagne six points, ce qui lui en fera 12 au total.

Ci-dessous, une représentation graphique des points cumulés par un candidat en fonction des réponses justes qu'il a trouvé :



4./ Combien de points le candidat aura-t-il cumulé au bout de 7 réponses justes ?

$$2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 + 2 \times 7 = 56$$

Le candidat aura 56 points

5./ Laquelle des deux formules semble être une situation de proportionnalité ?

Ce n'est certainement pas la deuxième mais plutôt la première formule.

6./ Dans une situation de proportionnalité, comment semble être la représentation graphique ?

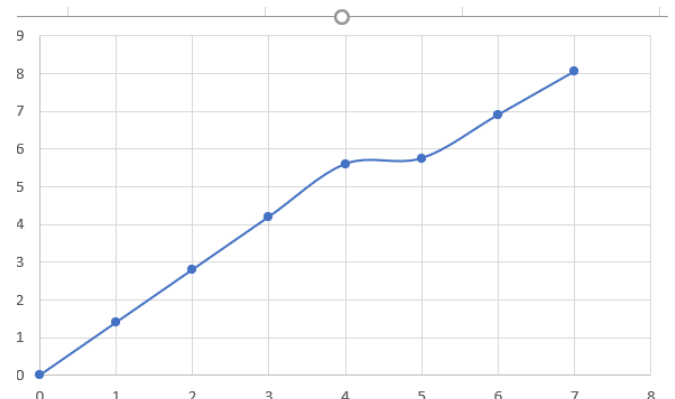
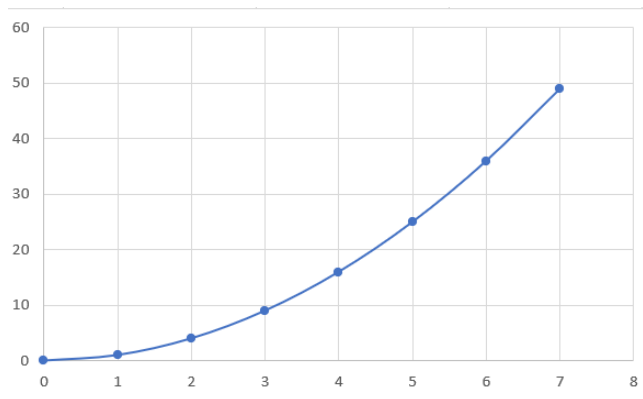
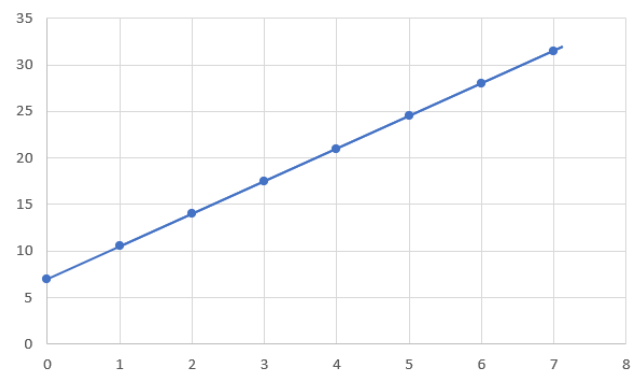
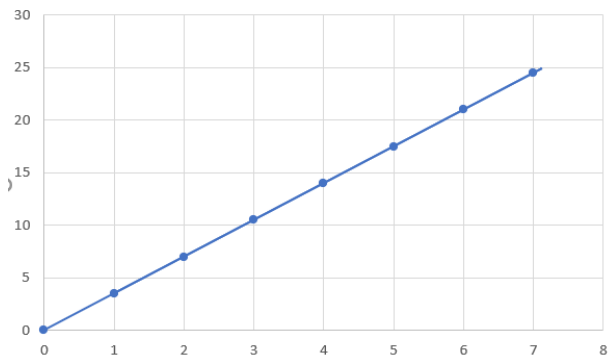
Elle semble être une droite. De plus, elle passe par l'origine.

Bilan :

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exercice 1 :

Lesquelles des situations suivantes sont des situations de proportionnalité ?



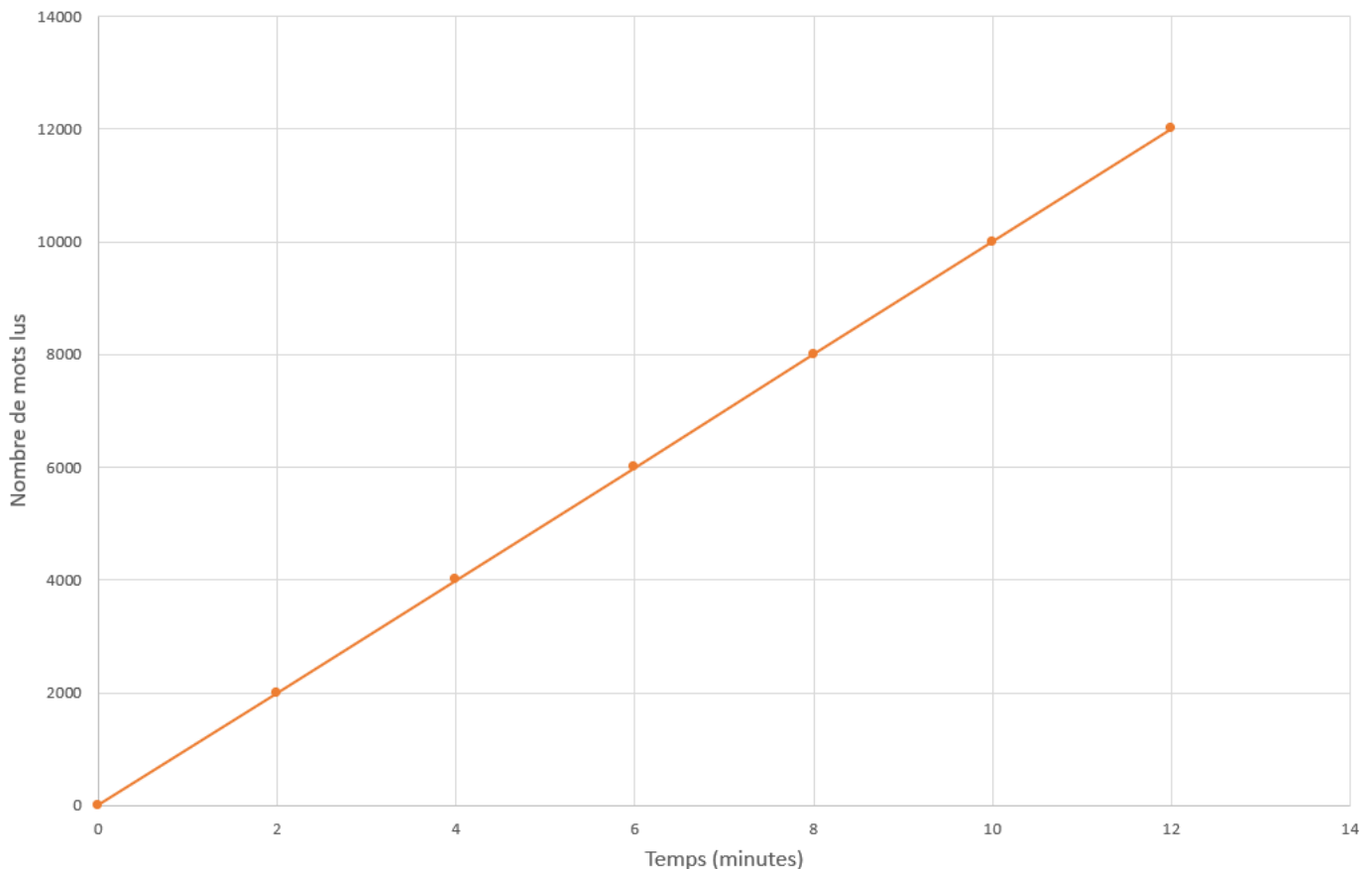
Exercice 2 :

Un magasin de vêtements décide de baisser le prix de ses jupes de 22%.

- 1./ Marie achète une jupe qui coûtait 75 € avant la réduction. Combien va-t-elle la payer ?
- 2./ Aïcha achète une jupe 60,06 €. Combien cette jupe coûtait-elle avant la réduction ?

Exercice 3 :

Le graphique suivant montre le nombre de mots lus par un champion de lecture rapide, en fonction du temps :



- 1./ Combien de temps faut-il au lecteur pour lire un texte de 8 000 mots ?
- 2./ Combien de mots peut-il lire en 4 minutes ?
- 3./ Justifier que c'est une situation de proportionnalité.
- 4./ Estimez le temps qu'il faut à ce lecteur pour lire un livre de 500 pages contenant toutes 40 lignes d'en moyenne 14 mots.

CORRECTIONS :

Exercice 1 :

La seule courbe qui correspond à une situation de proportionnalité est la numéro 1 car c'est la seule qui est une droite qui passe par l'origine.

Exercice 2 :

1./ Appelons P le prix qu'elle va payer :

$$P = 75 \times \left(1 - \frac{22}{100}\right) = 75 \times 0,78 = 58,5$$

Elle paiera 58,5€ la jupe.

2./ Appelons P le prix que la jupe coutait :

$$60,06 = P \times \left(1 - \frac{22}{100}\right)$$

$$60,06 = P \times (1 - 0,22)$$

$$60,06 = P \times 0,78$$

$$\frac{60,06}{0,78} = P$$

$$77 = P$$

La jupe coutait 77 € avant la réduction.

Exercice 3 :

1./ Il lui faut 8 minutes pour lire 8 000 mots.

2./ En 4 minutes il peut lire 4 000 mots.

3./ La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère, c'est donc bien une situation de proportionnalité.

4./ Commençons par calculer le nombre de mots qu'il y a dans 500 pages :

$$14 \times 40 = 560$$

Il y a 560 mots par page.

$$560 \times 500 = 280\,000$$

Il y a 280 000 mots dans ce livre.

Nombre de mots	Temps (min)
2000	2
280 000	

$$\frac{280000 * 2}{2000} = 280$$

Il lui faudra 280 minutes.

$$\frac{280}{60} \approx 4,7 \text{ heures}$$

$$0,7 \times 60 = 42$$

Il lui faudra 4,7 heures environ, soit 4 heures et 42 minutes pour lire ce livre de 500 pages.

III./ Grandeurs composées

Une grandeur produit est une grandeur obtenue en faisant le produit de deux grandeurs.

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en faisant le quotient de deux grandeurs.

Cas pratique :

La quantité d'énergie consommée par un appareil électrique dépend de sa puissance (qui s'exprime en Watts) et du temps (en heures).

$$E = P \times t$$

E : Quantité d'énergie(Wh)

t : Temps (h)

P : Puissance (W)

1./ Calculer la quantité d'énergie électrique consommée par une ampoule de 50 W qui reste allumée toute une année.

2./ Combien coûte l'utilisation d'un four de 1 500W pendant une heure et demie, si le kWh est facturé 0,1546 € ?

3./ Quelle est la puissance d'un lecteur DVD sachant qu'il est resté allumé 2 heures et que 320Wh ont été consommés pendant son utilisation ?

CORRECTION :

1./ Dans une année il y a 365 jours et dans une journée il y a 24h :

$$365 \times 24 = 8\,760 \text{ heures}$$

Il y a 8 760 heures en une année.

$$8\,760 \times 50 = 438\,000 \text{ Wh} = 438 \text{ kWh}$$

La quantité d'énergie consommée en une année par cette ampoule est 438 kWh.

2./

$$1\text{h}30 = 1,5\text{h}$$

Calculons la quantité d'énergie consommée :

$$1\,500 \times 1,5 = 2\,250 \text{ Wh} = 2,25 \text{ kWh}$$

2 250 Wh ont été consommées par ce four, soit, 2,25 kWh.

$$2,25 \times 0,1546 = 0,34785 \text{ €}$$

La consommation de ce four pendant une heure et demie coutera 0,34785 €.

3./

$$E = P \times t$$

$$160 \text{ W} = P$$

$$320 = P \times 2$$

Ce lecteur DVD a une puissance de 160 Watts.

$$\frac{320}{2} = P$$

Exercice 1 :

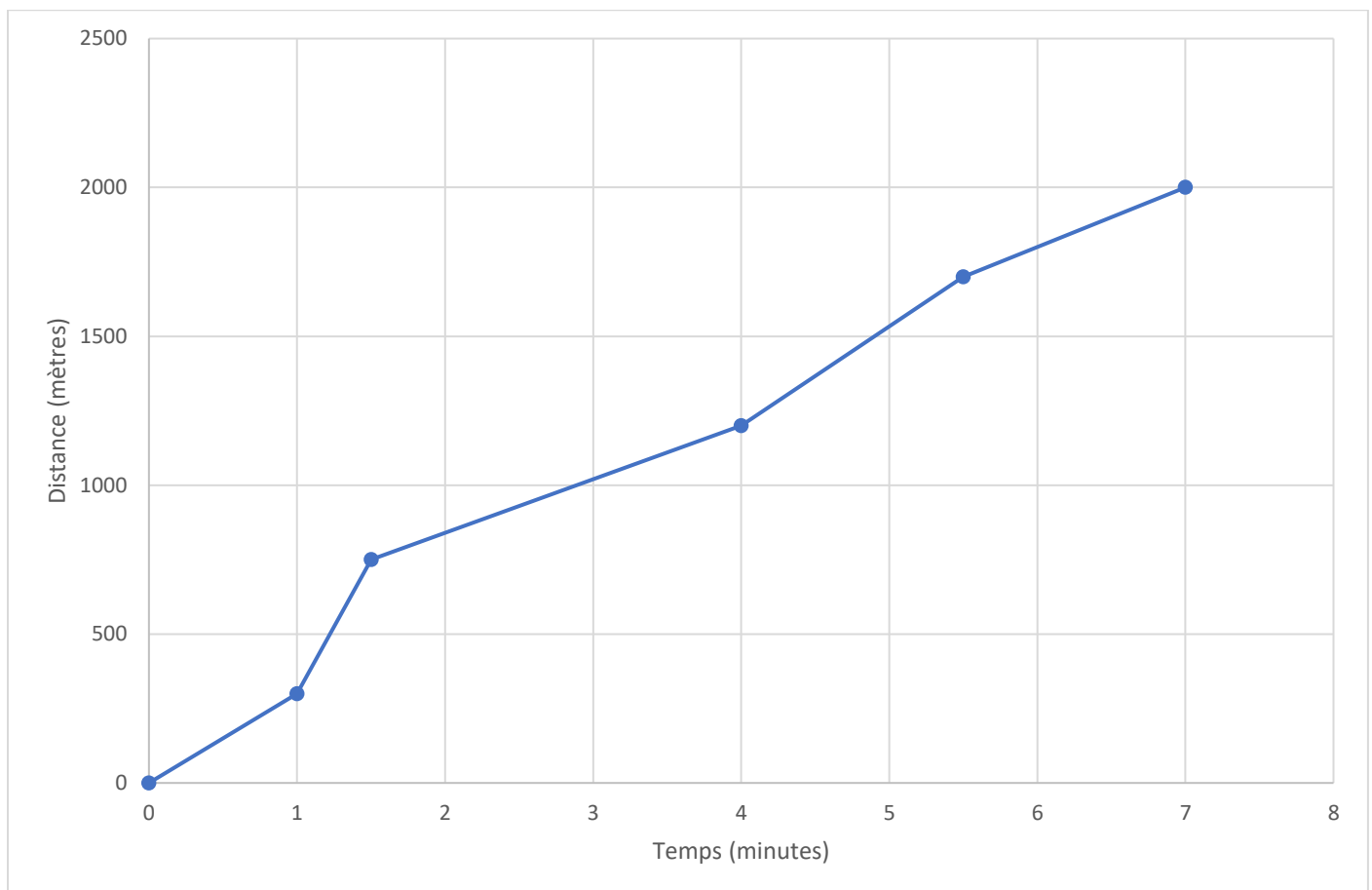
Pendant les vacances d'été, une station de péage d'autoroute a calculé qu'il y a eu 2 300 véhicules par heure en moyenne qui sont passés entre le 1^{er} Août 2021 et le 15 août 2021.

1./ Estimez le nombre de véhicules qui sont passés par cette station de péage le 4 Août 2021 entre 09H00 et 12h00.

2./ Un employé de la société de péage commence à compter les véhicules qu'il rencontre le 2 Août à partir de 11H30. A quelle heure aura-t-il rencontré 5 750 véhicules ?

Exercice 2 :

Mia va au collège en marchant. Le graphique ci-dessous illustre son trajet :



1./ Quelle distance parcourt-elle pour aller au collège ?

2./ Combien de temps met-elle ?

3./ Calculer sa vitesse moyenne.

Exercice 3 :

Sur le chantier de sa nouvelle maison, Monsieur Nacio n'arrive pas à soulever une tige d'acier pleine, de forme cylindrique.

Cette tige d'acier mesure 3 mètres de long et a un rayon de 4 cm.

L'acier a une masse volumique de $7,85 \text{ g/cm}^3$.

Calculer la masse de cette tige arrondie au kg.

Rappels : Le volume du cylindre :

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

Exercice 4 : (DEVOIR MAISON)

Lors du semi-marathon du Mont Ventoux en 2014, Monsieur Nacio a couru pendant 3h22min pour faire les 21,6 km de la course.

En course à pied, on mesure l'allure en min/km (minutes par kilomètres).

Calculez l'allure de Monsieur Nacio lors de cette course.

ATTENTION : Ne pas confondre l'allure en min/km et la vitesse en km/min !!!

CORRECTIONS :

Exercice 1 :

1./ Entre 9h00 et 12h00 il y a 3h00 qui s'écoulent :

$$2300 \times 3 = 6\,900 \text{ véhicules}$$

Il y a eu 6 900 véhicules qui sont passés en moyenne.

2./ Calculons d'abord le temps qu'il mettra pour compter 5 750 véhicules :

Nombre de véhicules	Temps (h)
2300	1
5750	

$$\frac{5750 \times 1}{2300} = 2,5 \text{ h}$$

Il mettra 2,5h ; soit 2h30min.

Il commence à compter à 11h30, donc il aura vu passer 5 750 véhicules à 14h00 environ.

Exercice 2 :

1./ Elle parcourt 2 000 mètres pour aller au collège.

2./ Elle met 7 minutes pour venir au collège.

3./

Distance (m)	Temps (min)
2000	7
	1

$$\frac{2000}{7} \approx 285,7 \text{ m/min}$$

Sa vitesse moyenne est de 285,7 m/min environ.

Exercice 3 :

D'abord, calculons le volume du cylindre et convertissons les mètres en centimètres :

$$3\text{m} = 300 \text{ cm}$$

$$V = \pi \times 4^2 \times 300$$

$$V = \pi \times 16 \times 300$$

$$V = \pi \times 4800 = 4800 \pi \text{ cm}^3$$

Masse (g)	Volume (cm ³)
7,85	1
	4800 π

$$\frac{7,85 \times 4800\pi}{1} = 7,85 \times 4800\pi \approx 118\,315 \text{ g} \approx 118 \text{ kg}$$

Il est normal que Monsieur Nacio n'arrive pas à soulever la tige de métal, car elle pèse plus de 100 kg !!!

Exercice 4 :

Commençons par convertir les heures en minutes :

$$3\text{h} = 3 \times 60 \text{ min} = 180 \text{ minutes}$$

$$3\text{h}22\text{min} = 180\text{min} + 22\text{min} = 202 \text{ min}$$

Monsieur Nacio a couru 202 minutes pour 21,6 km.

Distance (km)	Temps (min)
1	
21,6	202

$$\frac{202 \times 1}{21,6} \approx 9,35 \text{ min/km}$$

L'allure de Monsieur Nacio sur cette course est d'environ 9,35 min/km.