

## Chapitre 5 : Ecriture fractionnaire

### I./ Ecritures d'un nombre et comparaison

#### 1./ Différentes écritures d'un nombre

##### Activité :

Qu'est-ce qu'une fraction ? Une proportion ?

##### Bilan :

Un nombre peut s'écrire sous plusieurs formes :

- Ecriture décimale Exemple : 0,35
- Ecriture fractionnaire Exemple :  $\frac{35}{100}$  ou  $\frac{7}{20}$
- Pourcentage Exemple : 35%

**ATTENTION : Certains nombres n'ont pas d'écriture décimales !!!!**

##### Exemple :

$$\frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\frac{5}{6} \approx 0,83$$

$$\pi \approx 3,14$$

#### 2./ Simplifier, réduire une fraction

La valeur d'une fraction ne change pas si on multiplie ou on divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div p}{b \div p}$$

##### Exemple :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 11}{5 \times 11} = \frac{33}{55}$$

$$\frac{45}{25} = \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Simplifier ou réduire une fraction revient à l'écrire sous forme d'une fraction égale qui a un numérateur et un dénominateur plus petit.

On peut utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers pour simplifier ou réduire une fraction.

##### Exemple :

$$\frac{1155}{1650} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 5^2 \times 11} = \frac{\mathbf{3} \times \mathbf{5} \times 7 \times \mathbf{11}}{2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5} \times 5 \times \mathbf{11}} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$$

Exercice : Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{55}{10}$$

$$\frac{1250}{365}$$

$$\frac{2220}{6068}$$

Correction :

$$\frac{55}{10} = \frac{5 \times 11}{5 \times 2} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{1250}{365} = \frac{2 \times 5^4}{5 \times 73} = \frac{2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 73} = \frac{250}{73}$$

$$\frac{2220}{6068} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 37}{2^2 \times 37 \times 41} = \frac{15}{41}$$

### 3./ Comparaison de fractions

Pour comparer deux fractions, on doit vérifier si elles ont des numérateurs ou dénominateurs communs :

1. Si elles ont le même dénominateur, celle qui a le plus petit numérateur est la plus petite fraction ;
2. Si elles ont le même numérateur, celle qui a le dénominateur le plus petit est la plus grande.

Exemple

$$\frac{35}{21} < \frac{125}{21}$$

$$\frac{45}{3} > \frac{5}{3}$$

$$\frac{21}{4} < \frac{21}{2}$$

$$\frac{321}{15} > \frac{321}{22}$$

**ATTENTION :** Si les fractions n'ont ni numérateur, ni dénominateur commun, il faut les mettre au même dénominateur.

Exemple :

Pour comparer  $\frac{21}{3}$  et  $\frac{18}{9}$  on peut faire :

$$\frac{21}{3} = \frac{21 \times 3}{3 \times 3} = \frac{63}{9}$$

Et conclure :

$$\frac{63}{9} > \frac{18}{9}$$

Donc :

$$\frac{21}{3} > \frac{18}{9}$$

On peut également faire :

$$\frac{18}{9} = \frac{18 \div 3}{9 \div 3} = \frac{6}{3}$$

Et conclure :

$$\frac{6}{3} < \frac{21}{3}$$

Donc :

$$\frac{18}{9} < \frac{21}{3}$$

Et si les dénominateurs n'ont pas de diviseur commun ?

On peut les multiplier entre eux.

Exemple :

$$\frac{21}{3} \text{ et } \frac{33}{4}$$

D'abord on fait :

$$\frac{21 \times 4}{3 \times 4} = \frac{84}{12}$$

Puis :

$$\frac{33 \times 3}{4 \times 3} = \frac{99}{12}$$

On peut conclure :

$$\frac{84}{12} < \frac{99}{12}$$

Donc :

$$\frac{21}{3} < \frac{33}{4}$$

Exercice :

Comparer les fractions suivantes :

a.  $\frac{55}{3}$  et  $\frac{25}{3}$

b.  $\frac{25}{4}$  et  $\frac{25}{11}$

c.  $\frac{44}{6}$  et  $\frac{22}{3}$

d.  $\frac{85}{11}$  et  $\frac{112}{22}$

e.  $\frac{44}{5}$  et  $\frac{22}{6}$

f.  $\frac{121}{22}$  et  $\frac{4}{3}$

Correction :

a.  $\frac{55}{3} > \frac{25}{3}$

b.  $\frac{25}{4} > \frac{25}{11}$

$$c. \frac{44}{6} = \frac{44 \div 2}{6 \div 2} = \frac{22}{3}$$

Donc :

$$\frac{44}{6} = \frac{22}{3}$$

$$d. \frac{85}{11} = \frac{85 \times 2}{11 \times 2} = \frac{170}{22}$$

Donc :

$$\frac{85}{11} > \frac{112}{22}$$

$$e. \frac{44}{5} = \frac{(44 \times 6)}{(5 \times 6)} = \frac{264}{30}$$

$$\frac{22}{6} = \frac{22 \times 5}{6 \times 5} = \frac{110}{30}$$

Donc :

$$\frac{44}{5} > \frac{22}{6}$$

$$f. \frac{4}{3} = \frac{4 \times 22}{3 \times 22} = \frac{88}{66}$$

$$\frac{121}{22} = \frac{121 \times 3}{22 \times 3} = \frac{363}{66}$$

Donc :

$$\frac{4}{3} < \frac{121}{22}$$

## Exercices : Comparaison de fractions

### Exercice 1 :

1./ Mettre ces deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{21}{24} \text{ et } \frac{3}{8}$$

2./ Comparer ces deux fractions.

### Exercice 2 :

1./ Comparer les paires de fractions suivantes :

$$a. \frac{11}{2} \text{ et } \frac{23}{8}$$

$$b. \frac{13}{52} \text{ et } \frac{1}{4}$$

$$c. \frac{11}{23} \text{ et } \frac{2}{3}$$

2./ Ranger dans l'ordre décroissant les fractions suivantes :

$$\frac{13}{11} \quad \frac{2}{20} \quad \frac{231}{220} \quad \frac{57}{110}$$

### Exercice 3 :

Trois radios se disputent les audiences de la matinale de 8H à 10H.

La radio GIRVIN RADIO a eu onze vingt-deuxièmes des audiences, la radio RJN a eu 25% des audiences et la radio SKORYCK a eu  $\frac{1}{4}$  des audiences.

Laquelle de ces trois radios a eu la plus grosse part d'audience ? Justifier votre réponse.

## CORRECTIONS :

### Exercice 1 :

1./

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$$

2./ Les deux fractions ayant maintenant le même dénominateur, on peut les comparer :

$$\frac{21}{24} > \frac{9}{24}, \text{ donc on peut dire que } \frac{21}{24} > \frac{3}{8}$$

## Exercice 2 :

1./ a./ On va transformer  $\frac{11}{2}$

$$\frac{11}{2} = \frac{11 \times 4}{2 \times 4} = \frac{44}{8}$$

Les deux fractions ont le même dénominateur, on peut donc les comparer :

$$\frac{44}{8} > \frac{23}{8}, \quad \text{donc on peut dire que } \frac{11}{2} > \frac{3}{8}$$

b./ On va transformer  $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 13}{4 \times 13} = \frac{13}{52}$$

Les deux fractions ont le même dénominateur donc on peut les comparer :

$$\frac{13}{52} = \frac{13}{52}, \quad \text{donc on peut dire que } \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

c./ Ici on est obligé de modifier les deux fractions.

$$\frac{11}{23} = \frac{11 \times 3}{23 \times 3} = \frac{33}{69}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 23}{3 \times 23} = \frac{46}{69}$$

Les deux fractions ont le même dénominateur, on peut donc les comparer :

$$\frac{33}{69} < \frac{46}{69}, \quad \text{donc on peut dire que } \frac{11}{23} < \frac{2}{3}$$

2./ Ici on va transformer  $\frac{13}{11}$ ,  $\frac{2}{20}$ ,  $\frac{57}{110}$

$$\frac{13}{11} = \frac{13 \times 20}{11 \times 20} = \frac{260}{220}$$

$$\frac{2}{20} = \frac{2 \times 11}{20 \times 11} = \frac{22}{220}$$

$$\frac{57}{110} = \frac{57 \times 2}{110 \times 2} = \frac{114}{220}$$

Toutes les fractions ont le même dénominateur, on peut donc les comparer :

$$\frac{260}{220} > \frac{231}{220} > \frac{114}{220} > \frac{22}{220}, \quad \text{donc on peut dire que } \frac{13}{11} > \frac{231}{220} > \frac{57}{110} > \frac{2}{20}$$

## Exercice 3 :

Nous devons comparer trois fractions dans ce problème :

$$\frac{11}{22}, \frac{25}{100}, \frac{1}{4}$$

On peut décomposer 11 et 22 en produit de facteur premier :

$$\begin{array}{c|c} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$22 = 11 \times 2$$

$$\frac{11}{22} = \frac{11 \times 1}{2 \times 11} = \frac{1}{2}$$

Or on peut transformer  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 50}{2 \times 50} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100}$$

On peut comparer les trois fractions car elles ont maintenant le même dénominateur :

$$\frac{25}{100} = \frac{25}{100} < \frac{50}{100}, \quad \text{donc on peut dire que } \frac{1}{4} = 25\% < \frac{11}{22}$$

La radio qui a eu le plus d'audience est celle qui a eu onze vingt-deuxièmes des audiences. C'est GIRVIN RADIO.

## II./ Sommes et différences de fractions

Pour additionner ou soustraire des fractions il faut :

1. Qu'elles aient le même dénominateur :
2. Additionner ou soustraire les numérateurs et laisser le dénominateur.

Exemple :

$$\frac{11}{6} + \frac{14}{6} = \frac{11 + 14}{6} = \frac{25}{6}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{25}{8} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} - \frac{25}{8} = \frac{12}{8} - \frac{25}{8} = \frac{12 - 25}{8} = -\frac{13}{8}$$

Exercice : Calculer :

$$\frac{7}{8} + \frac{9}{8}$$

$$\frac{11}{5} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{44}{17} - \frac{125}{17}$$

$$\frac{12}{5} + \frac{22}{35}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{3}{81}$$

$$\frac{121}{22} + \frac{33}{3}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{25}{2}$$

Correction :

$$\frac{7}{8} + \frac{9}{8} = \frac{7+9}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{11}{5} - \frac{2}{5} = \frac{11-2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{44}{17} - \frac{125}{17} = \frac{44-125}{17} = -\frac{81}{17}$$

$$\frac{12}{5} + \frac{22}{35} = \frac{12 \times 7}{5 \times 7} + \frac{22}{35} = \frac{84}{35} + \frac{22}{35} = \frac{106}{35}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{3}{81} = \frac{4 \times 9}{9 \times 9} - \frac{3}{81} = \frac{36}{81} - \frac{3}{81} = \frac{36-3}{81} = \frac{33}{81} = \frac{3 \times 11}{3^4} = \frac{11}{27}$$

$$\frac{121}{22} + \frac{33}{3} = \frac{121 \times 3}{22 \times 3} + \frac{33 \times 22}{3 \times 22} = \frac{363}{66} + \frac{726}{66} = \frac{1089}{66} = \frac{3^2 \times 11^2}{2 \times 3 \times 11} = \frac{3 \times 3 \times 11 \times 11}{2 \times 3 \times 11} = \frac{33}{2}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{25}{2} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} - \frac{25 \times 3}{2 \times 3} = \frac{8}{6} - \frac{75}{6} = \frac{8-75}{6} = -\frac{67}{6}$$

Exercices : Calcul fractionnaire

Exercice 1 :

Ecris les sommes et différences sous forme d'une **fraction irréductible** :

$$A = \left(+\frac{12}{4}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{22}{2}\right)$$

$$B = \frac{11}{7} - \frac{4}{5} + \frac{11}{35} - \left(-\frac{28}{35}\right)$$

*Indice : Pour la B, entoure chaque nombre dont le signe n'apparaît pas, de parenthèses et du signe (+).*

$$\text{Exemple : } \frac{11}{2} - \frac{3}{4} + \frac{8}{16} = \left(+\frac{11}{2}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{8}{16}\right)$$



### Exercice 2 :

Anastasia prévoit une randonnée entre amis. Ils partiront le matin à 8H00 et prévoient une pause pour le repas de midi. Ils doivent repartir vers 13H00, puis feront de nouveau une pause à 16H00 pour prendre une collation. La fin de la randonnée est prévue pour 19H00.

Le jour de la randonnée, Anastasia et ses amis ont parcouru deux cinquièmes du parcours au moment de la première pause. Entre la première pause et la deuxième ils auront fait  $\frac{7}{20}$  de plus du parcours.

Penses-tu qu'Anastasia et ses amis arriveront à finir le parcours dans les temps ? Justifie ta réponse.

### Exercice 3 :

Emilia, Flavio et Garance doivent peindre un mur. Emilia en peint les  $\frac{7}{20}$ , Flavio les  $\frac{4}{15}$  et Garance peint le reste.

Qui aura peint la plus grande surface ?

## CORRECTIONS :

### Exercice 1 :

On va d'abord mettre toutes les fractions au même dénominateur.

Transformons  $\frac{12}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{22}{2}$

$$\frac{12}{4} = \frac{12 \times 2}{4 \times 2} = \frac{24}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{22}{2} = \frac{22 \times 4}{2 \times 4} = \frac{88}{8}$$

Les fractions ont toutes le même dénominateur, on peut calculer !

$$A = \left(+\frac{12}{4}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{22}{2}\right)$$

$$A = \left(+\frac{24}{8}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{4}{8}\right) + \left(-\frac{88}{8}\right)$$

$$A = \left(+\frac{24}{8}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{4}{8}\right) + \left(-\frac{88}{8}\right)$$

$$A = \left(+\frac{24}{8}\right) + \left(+\frac{4}{8}\right) + \left(-\frac{88}{8}\right) = \frac{(+24) + (+4) + (-88)}{8} = \frac{(+28) + (-88)}{8} = \left(-\frac{60}{8}\right)$$

On va réduire cette fraction :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2^3$$

$$\frac{60}{8} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$A = \frac{15}{2}$$

$$B = \frac{11}{7} - \frac{4}{5} + \frac{11}{35} - \left(-\frac{28}{35}\right)$$

On va d'abord mettre toutes les fractions au même dénominateur.

On va donc transformer :  $\frac{11}{7}, \frac{4}{5}$

$$\frac{11}{7} = \frac{11 \times 5}{7 \times 5} = \frac{55}{35}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$B = \frac{11}{7} - \frac{4}{5} + \frac{11}{35} - \left(-\frac{28}{35}\right)$$

$$B = \frac{55}{35} - \frac{28}{35} + \frac{11}{35} - \left(-\frac{28}{35}\right)$$

$$B = \left(+\frac{55}{35}\right) - \left(+\frac{28}{35}\right) + \left(+\frac{11}{35}\right) - \left(-\frac{28}{35}\right)$$

$$B = \left(+\frac{55}{35}\right) + \left(-\frac{28}{35}\right) + \left(+\frac{11}{35}\right) + \left(+\frac{28}{35}\right)$$

$$B = \left(+\frac{55}{35}\right) + \left(+\frac{11}{35}\right) = \frac{55}{35} + \frac{11}{35} = \frac{55 + 11}{35} = \frac{66}{35}$$

Regardons si cette fraction est réductible :

$$\begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$35 = 7 \times 5$$

$$\frac{66}{35} = \frac{2 \times 3 \times 11}{5 \times 7}$$

On ne peut pas la réduire plus !

$$B = \frac{66}{35}$$

## Exercice 2 :

Nous avons deux fractions dans cet énoncé :

$$\frac{2}{5} \text{ et } \frac{7}{20}$$

Nous cherchons à savoir si Anastasia et ses amis arriveront à finir la randonnée dans les temps. Pour cela il nous faut savoir quelle fraction de la randonnée il leur reste à faire !

On peut additionner les deux fractions pour savoir combien ils ont parcouru au total !

Pour cela il faut mettre les fractions au même dénominateur :

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

On peut les additionner :

$$\frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{8+7}{20} = \frac{15}{20}$$

On peut en conclure qu'il reste  $\frac{5}{20}$  de la randonnée à faire. Ce calcul le justifie :

$$\frac{20}{20} - \frac{15}{20} = \frac{20-15}{20} = \frac{5}{20}$$

De 8H à 12H (soit en 4h), ils ont parcouru  $\frac{8}{20}$  de la randonnée, puis de 13H à 16H (en 3H) ils ont parcouru  $\frac{7}{20}$  de la randonnée.

Ils doivent finir la randonnée à 19H, il leur reste donc 3H (19H-16H=3H) pour parcourir  $\frac{5}{20}$ . On peut donc penser qu'ils arriveront à finir la randonnée dans les temps.

## Exercice 3 :

Pour savoir qui en a peint le plus il faut calculer la fraction du mur peinte par Garance. Il faut donc mettre les deux fractions connues au même dénominateur.

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{21}{60}$$

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \times 4}{15 \times 4} = \frac{16}{60}$$

Elles ont le même dénominateur, donc on peut les ajouter :

$$\frac{7}{20} + \frac{4}{15} = \frac{21}{60} + \frac{16}{60} = \frac{21+16}{60} = \frac{37}{60}$$

Si  $\frac{37}{60}$  du mur ont été peints par Emilia et Flavio, il en reste  $\frac{23}{60}$  à être peint par Garance d'après ce calcul :

$$\frac{60}{60} - \frac{37}{60} = \frac{60-37}{60} = \frac{23}{60}$$

On peut dire que :

$$\frac{16}{60} < \frac{21}{60} < \frac{23}{60}$$

C'est donc Garance qui en a peint le plus !