Chapitre 7 : Pyramides et cônes

I./ Pyramides

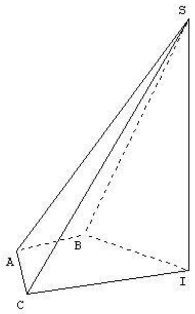
Poser la question aux élèves : Si je vous dis pyramide vous pensez à quoi ?

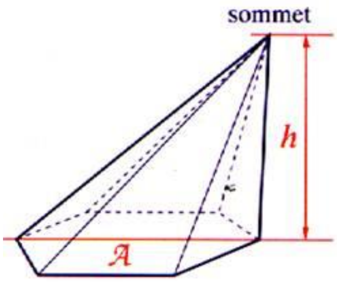
Définition : Une pyramide est un solide possédant une **base** qui est un polygone, et des **faces latérales** qui sont des triangles.

Définition : Une pyramide est dite régulière quand sa base est un polygone régulier et que toutes ses faces latérales sont des triangles isocèles identiques.

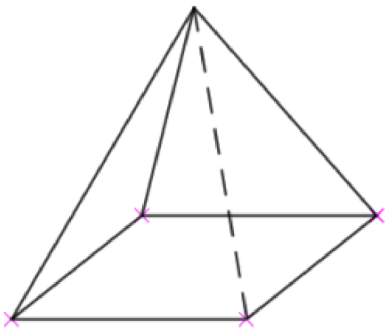
Définition : Un polygone régulier est un polygone qui a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

Poser la question aux élèves : Si je vous parle de perspective cavalière ?



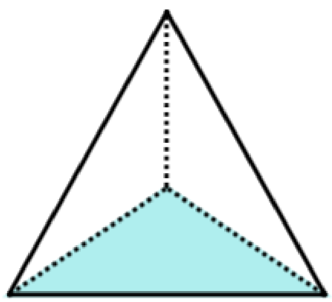


Perspectives cavalières de pyramides quelconques

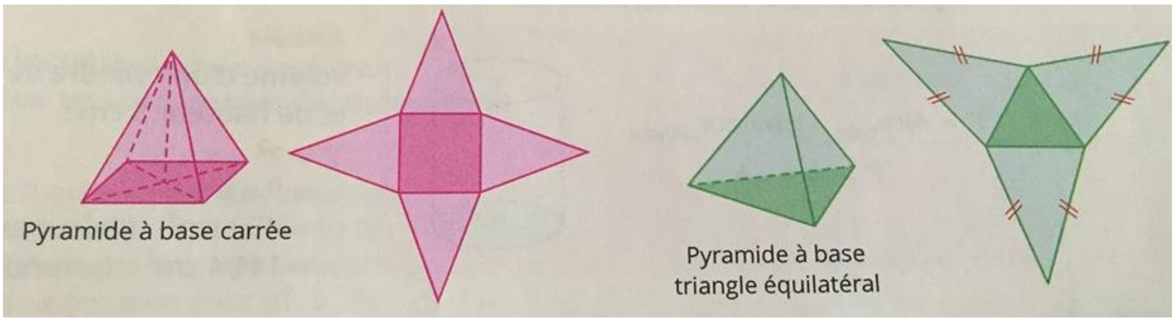


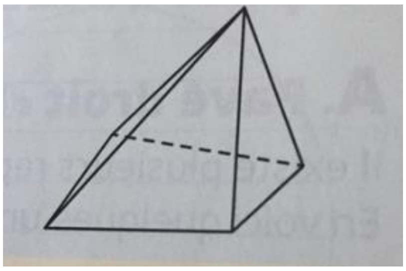
Perspectives cavalières de pyramides régulières à base carrée

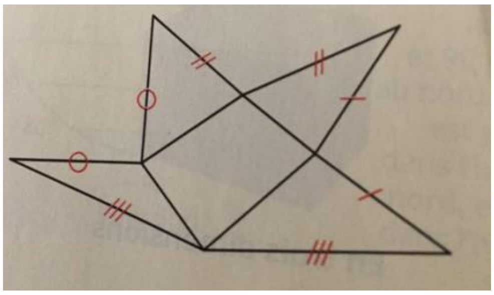
Perspective cavalière d'une pyramide régulière à base triangulaire

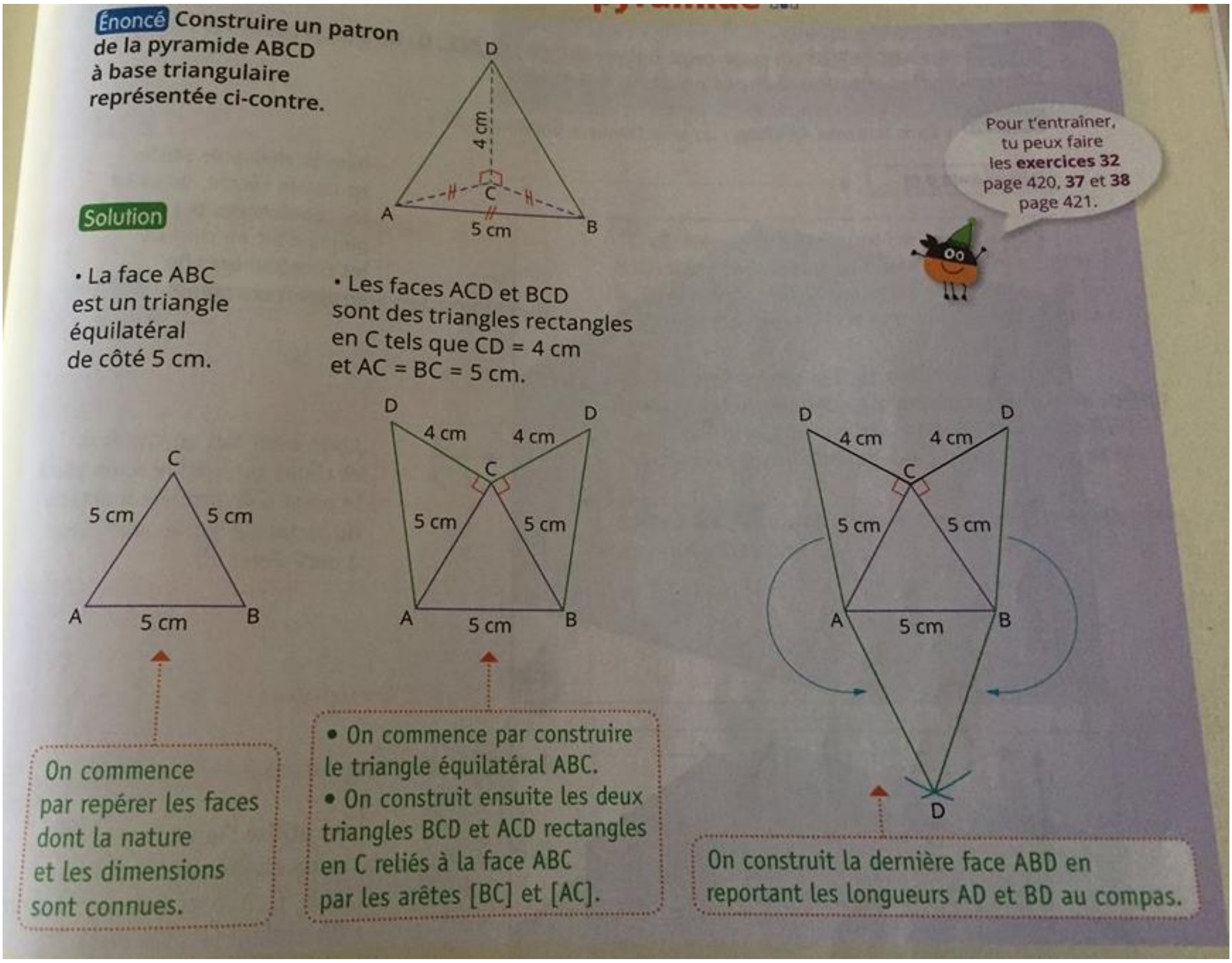


Le patron d'une pyramide est constitué d'un polygone et de triangles.









Énoncé Construire un patron de la pyramide ABCD à base triangulaire représentée ci-contre.

Pour t'entraîner, tu peux faire les **exercices 32** page 420, **37** et **38** page 421.

Solution

• La face ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

• Les faces ACD et BCD sont des triangles rectangles en C tels que CD = 4 cm et AC = BC = 5 cm.

On commence par repérer les faces dont la nature et les dimensions sont connues.

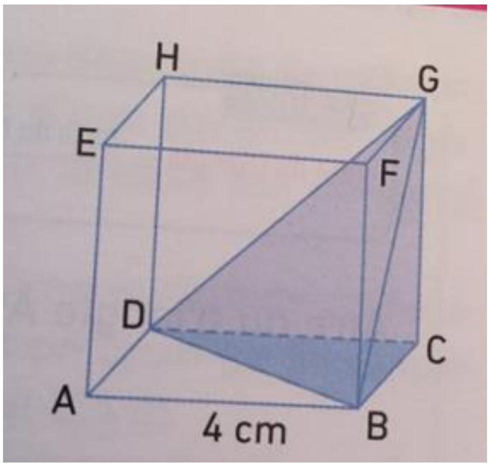
• On commence par construire le triangle équilatéral ABC.
• On construit ensuite les deux triangles BCD et ACD rectangles en C reliés à la face ABC par les arêtes [BC] et [AC].

On construit la dernière face ABD en reportant les longueurs AD et BD au compas.

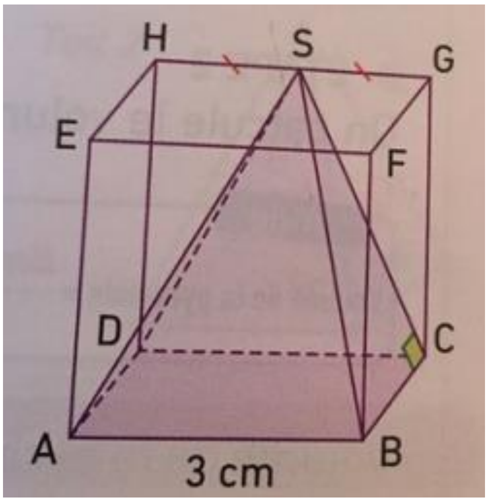
Exercices pyramides :

Exercice 1 : Construire un patron

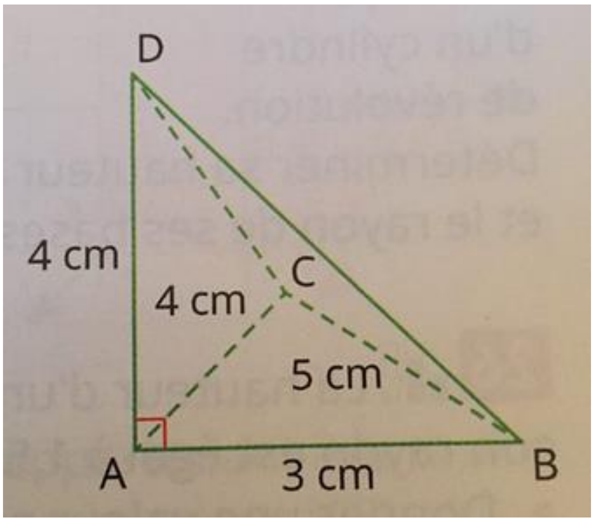
1./ Construire le patron de la pyramide GBCD inscrite dans le cube ABCDEFGH.



2./ Construire un patron de la pyramide SABCD inscrite dans le cube ABCDEFGH. Notons que S est le milieu de [GH] et que les triangles SBC et SAD sont tous deux des triangles rectangles respectivement en C et D.



Exercice 2 : Triangles et Pythagore…



1./ Donner le nom de la pyramide, sa base et sa hauteur.

2./ Calculer la longueur du segment [BD].

3./ Dessiner en vraie grandeur les faces ABC et ABD.

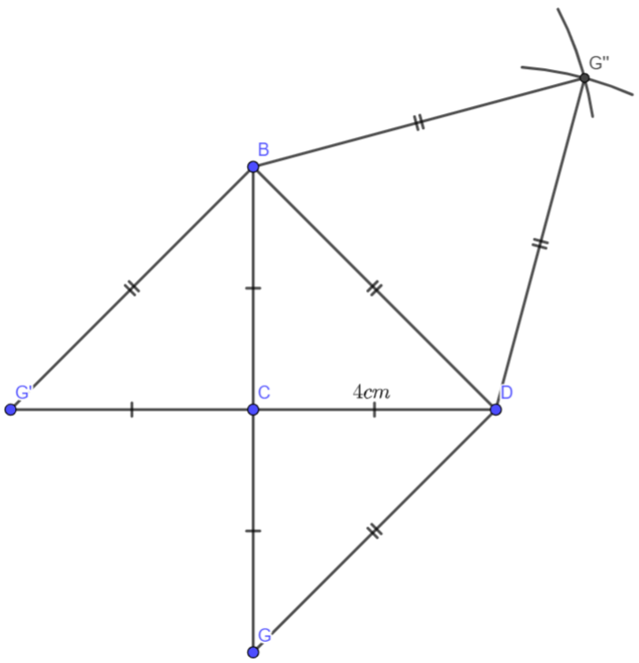
4./ Déterminer la nature des triangles ADC et BCD.

CORRECTIONS :

Exercice 1 :

1./ Rappelons-nous que toutes les arêtes du cube ont la même longueur !

La base de la pyramide GBCD est le triangle DBC qui est isocèle rectangle en C. Cette pyramide est composée de quatre triangles : DBC ; GCD ; GCB ; GDB. Les triangles DBC ; GCD et GCB sont identiques et tous trois isocèles rectangles en C.



2./ La base de la pyramide SABCD est le carré ABCD de côté 3cm. Pour dessiner la pyramide, il suffit de connaître les longueurs SC et SD (qui sont les mêmes) en appliquant le théorème de Pythagore sur le triangle SCG ou SHD.

Calcul de SC :

Le triangle SCG est un triangle rectangle en G, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

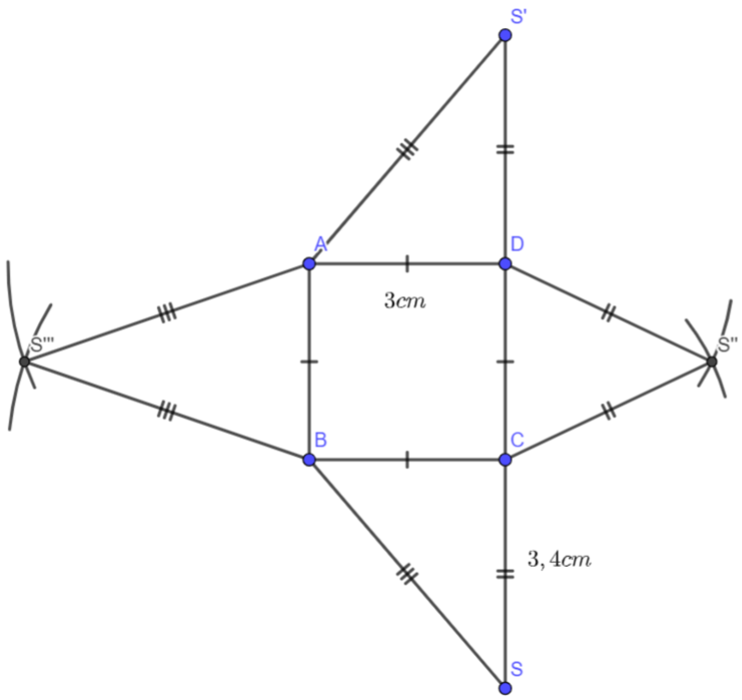
$$SC^2 = SG^2 + GC^2$$

$$SC^2 = 1{,}5^2 + 3^2$$

$$SC^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 + 3 \times 3$$

$$SC^2 = 2{,}25 + 9 = 11{,}25$$

$$SC = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}4\ cm$$



Exercice 2 :

1./ La pyramide s'appelle DABC, sa base est le triangle ABC et sa hauteur est le segment [AD].

2./ ABD est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

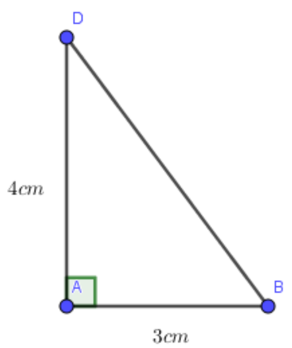
$$DB^2 = AB^2 + AD^2$$

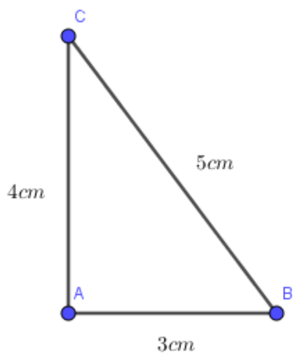
$$DB^2 = 3^2 + 4^2 = 3 \times 3 + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25$$

$$DB = \sqrt{25} = 5\ cm.$$

Le segment [DB] mesure 5cm.

3./





4./ On observe que les triangles ABD et ABC sont identiques. Le triangle ABC est donc un triangle rectangle en A.

Triangle ADC :

Le triangle ADC est donc un triangle rectangle isocèle en A.

Triangle BCD :

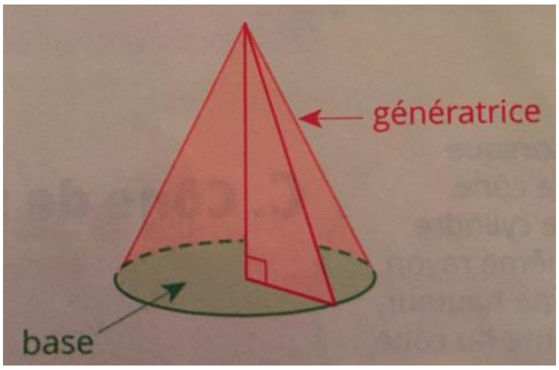
Précédemment nous avons calculé que BD = 5cm.

On observe donc que BD = BC = 5cm.

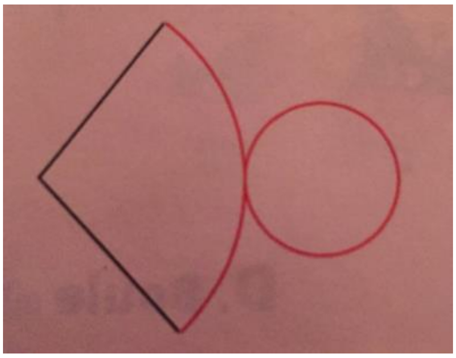
Le triangle BCD est donc un triangle isocèle en B.

II./ Cône de révolution

Définition : Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés adjacents à l'angle droit. Sa base est un disque. **La génératrice** d'un cône est un segment qui relie le sommet du cône à un point du cercle de base.



Propriété : Dans le patron d'un cône, la longueur de l'arc de cercle sur la portion de disque est égale au périmètre du disque constituant l'autre partie du patron.



Rappel : Périmètre d'un cercle : $P = 2 \times \pi \times R \;\; ou \; P = \pi \times \Phi$

$$R = rayon\ du\ cercle$$

$$\Phi = diamètre\ du\ cercle$$

Exemple : Calculez le périmètre : ***Arrondir au centième***

1./ D'un cercle de rayon 4 cm

2./ D'un cercle de diamètre 7 m

3./ D'un cercle de diamètre 3,2 dm

4./ D'un cercle de rayon 8,6 km

Correction :

1./ $P \approx 2 \times 3{,}14 \times 4 \approx 25{,}12\ cm^2$

2./ $P \approx 3{,}14 \times 7 \approx 21{,}98\ m^2$

3./ $P \approx 3{,}14 \times 3{,}2 \approx 10{,}05\ dm^2$

4./ $P \approx 2 \times 3{,}14 \times 8{,}6 \approx 54{,}01\ km^2$

Exercices : cône de révolution

Exercice 1 :

On considère un cône de sommet S. Sa base a pour centre le point O et a un rayon de 3cm. Les points M et N sont sur le cercle base du cône de telle façon que le segment [MN] soit un diamètre du cercle. On sait que SM=6cm.

1./ Reproduire un schéma en perspective cavalière à main levée.

2./ Déterminer la nature des triangles SOM et SON.

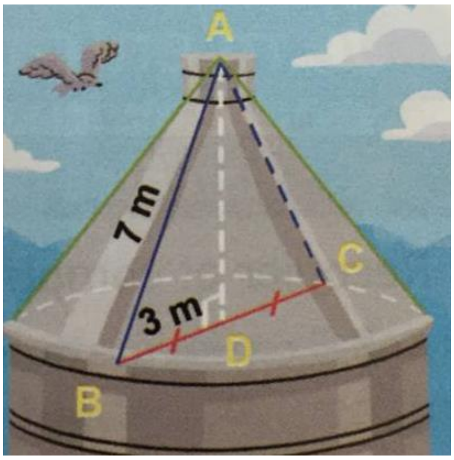
3./ Calculer la hauteur [SO].

4./ En déduire la longueur SN.

5./ Déterminer la nature du triangle SMN.

Exercice 2 :

Calculer la longueur du toit du silo à grains de forme conique représenté ci-contre :



CORRECTIONS :

Exercice 1 :

1./ Voir cours

2./ SOM et SON sont des triangles rectangles car [SM] et [SN] sont des génératrices du cône de révolution.

3./ Le triangle SOM est un triangle rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$SM^2 = SO^2 + OM^2$$

$$6^2 = SO^2 + 3^2$$

$$36 = SO^2 + 9$$

$$36 - 9 = SO^2 + 9 - 9$$

$$27 = SO^2$$

$$\sqrt{27} = SO$$

$$SO \approx 5{,}2cm$$

Le segment [SO] mesure environ 5,2cm.

4./ SOM et SON sont des triangles équivalents, donc SN = SM = 6 cm.

5./ On sait que SM = SN = 6 cm. On sait que OM=ON=3cm. Donc MN = OM+ON car [MN] est un diamètre du cercle. Donc MN = 3+3=6cm.

On observe alors que SM=SN=MN=6cm. SMN est un triangle équilatéral.

Exercice 2 :

On observe que le triangle ABD est un triangle rectangle en D, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AD^2 + DB^2$$

$$7^2 = AD^2 + 3^2$$

$$49 = AD^2 + 9$$

$$49 - 9 = AD^2 + 9 - 9$$

$$40 = AD^2$$

$$\sqrt{40} = AD$$

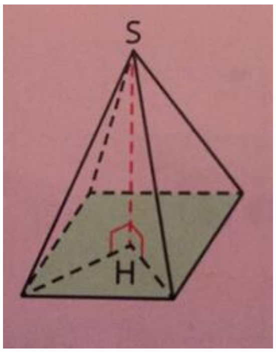
$$AD \approx 6{,}32\ m$$

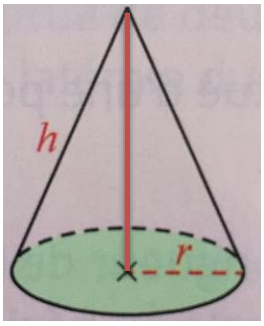
La longueur du toit du silo est d'environ 6,32 m.

III./ Volumes

Définition : Le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution se calcule ainsi :

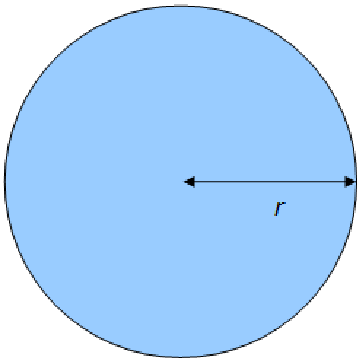
$$Volume = \frac{(Aire_{base} \times Hauteur)}{3}$$

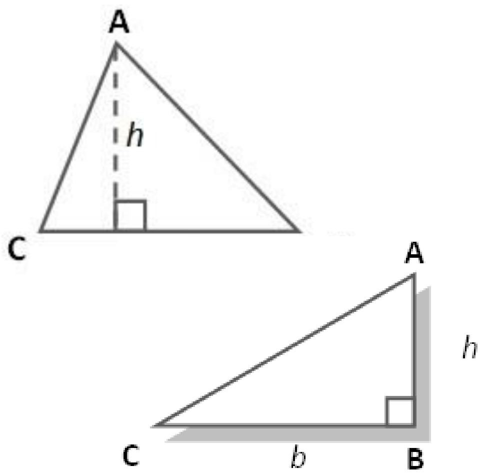




Rappels : Aire d'un disque : $\mathcal{A}_{disque} = \pi \times r^2$

Aire d'un triangle : $\mathcal{A}_{triangle} = \frac{b \times h}{2}$





Exemples :

1./ Calculez le volume d'une pyramide à base carrée de côté 4cm et de hauteur 6cm.

2./ Calculez le volume d'une pyramide à base triangulaire, dont la hauteur est 9cm et dont la base est un triangle rectangle ABC en A tel que : AB=9cm ; AC=5cm.

3./ Calculez le volume d'un cône de révolution de hauteur 7 cm et dont la base a un rayon de 5cm.

4./ Calculez le volume d'un cône de révolution de hauteur 11 m et dont la base a un diamètre de 6 m.

Correction :

1./

$$Aire_{base} = 4 \times 4 = 16\ cm^2$$

$$Volume_{pyramide} = \frac{16 \times 6}{3} = \frac{96}{3} = 32\ cm^3$$

2./

$$Aire_{base} = \frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5\ cm^2$$

$$Volume_{Pyramide} = \frac{22{,}5 \times 9}{3} = \frac{202{,}5}{3} = 67{,}5\ cm^3$$

3./

$$Aire_{base} \approx 2 \times 3{,}14 \times 5 \approx 31{,}4\ cm^2$$

$$Volume_{cone} \approx \frac{31{,}4 \times 7}{3} \approx \frac{219{,}8}{3} \approx 73{,}3\ cm^3$$

4./

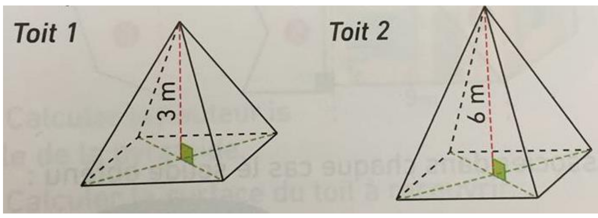
$$AIre_{base} \approx 3{,}14 \times 6 \approx 18{,}84\ cm^2$$

$$Volume_{cone} \approx \frac{18{,}84 \times 11}{3} \approx \frac{207{,}24}{3} \approx 69{,}08\ cm^3$$

Exercices volumes pyramides et cônes :

Exercice 1 :

On a représenté ci-contre deux toits de maison. Ces deux toits ont la forme de pyramides à bases carrées. Le toit 1 a pour base un carré de côté 5m, tandis que le toit 2 a pour base un carré de côté 4m.



1./Sous quel toit a-t-on le plus grand volume ?

2./ Les espaces sous les toits de ces maisons sont utilisés comme des greniers. Martin possède la maison 1 et Julie la maison 2. Martin dit à Julie qu'il a un plus grand grenier. A votre avis pourquoi dit-il cela ?

Exercice 2 :

Samir travaille avec ses parents qui sont marchands de glace. Il veut connaître quel volume de glace il pourra mettre dans les cônes utilisés. Il sait que la hauteur du cône est de 10 cm et que le disque de base a pour diamètre 5 cm.

Aidez Samir à calculer le volume du cône.

CORRECTIONS :

Exercice 1 :

1. Toit 1 :

$$Aire_{base} = 5^2 = 5 \times 5 = 25\ m^2$$

$$Volume_{toit1} = \frac{25 \times 3}{3} = 25\ m^3$$

Toit 2 :

$$Aire_{base} = 4^2 = 4 \times 4 = 16\ m^2$$

$$Volume_{Toit2} = \frac{16 \times 6}{3} = \frac{16 \times 3 \times 2}{3} = 32\ m^3$$

C'est sous le Toit 2 qu'il y a le plus grand volume.

2./ Bien que le Toit 2 ait le plus grand volume, sa surface au sol (son aire) est plus petite que celle du Toit 1. C'est pour cela que Martin dit ça.

Exercice 2 :

$$Aire_{base} \approx 3{,}14 \times 5 \approx 15{,}7\ cm^2$$

$$Volume_{cone} \approx \frac{15{,}7 \times 10}{3} \approx \frac{157}{3} \approx 52{,}3\ cm^3$$

Samir pourra mettre environ 52,3 cm^3 de glace dans les cônes.